EXEMAALT
Un serveur d'exercices de maths "alternatifs" : pour quoi faire ? *

Vincent Guirardel et Frédéric Le Roux

9 mars 2007

L'essentiel de ce texte date de la création d'EXEMAALT, c'est-à-dire de l'été 2001.

Résumé. Nous développons la thèse suivante : les exercices de maths actuellement proposés aux étudiants en DEUG accordent une place disproportionnée à l'aspect technique. On aboutit ainsi à un apprentissage de techniques sophistiquées qui, faute de recul, sont inutilisables. Il nous semble souhaitable, et possible, de proposer aussi aux étudiants des activités dont ils perçoivent mieux le sens, et qui exploreraient plus largement les diverses facettes du travail du mathématicien. Mais ceci demande un renouvellement important du stock d'exercices disponibles, ce qu'aucun enseignant ne peut espérer faire seul : c'est pourquoi nous proposons une mise en commun la plus large possible des efforts dans cette direction, sous la forme d'une base de données structurée d'exercices "alternatifs".

Avertissement. Nous espérons que notre point de vue sur certains travers de l'enseignement actuel ne sera pas compris comme du mépris ; d'ailleurs, nous nous considérons comme partie prenante du système, et la plupart des critiques que nous formulons sont aussi des auto-critiques. D'autre part, nous ne prétendons pas que les textes et exercices qui composent cette page Web sont le résultat d'une réflexion exhaustive ; en particulier, nous sommes conscients de la part de naïveté et de lieux communs qu'ils contiennent. Loin de proposer des solutions toutes faites aux délicats problèmes de l'enseignement, nous voulons avant tout "secouer le cocotier"...

1 Constat (quelques remarques sur l'enseignement actuel)

Résumé de cette partie : Des contraintes extérieures ont entraîné une détérioration des conditions de travail en DEUG ; malgré des efforts d'adaptation de la part de l'université, c'est le sentiment d'échec qui prédomine.

1.1 Des conditions difficiles.

L'enseignement "de masse", décidé par le pouvoir politique, entraîne d'abord une grande hétérogénéité des étudiants ; nous sommes donc dans une période où l'enseignement aurait besoin d'être renouvelé, diversifié ; or une deuxième conséquence de cette augmentation du nombre

*Ce document est disponible à l'adresse suivante :
`http://matexo.emath.fr/exemaalt/textes/motivations/motivations.html`

d'étudiants est la diminution du taux d'encadrement (nombre d'enseignants par étudiant), ce qui favorise la reproduction figée des méthodes d'enseignement antérieures. L'augmentation du service des enseignants[1] et la déconsidération de l'activité d'enseignement au profit de l'activité de recherche vont également dans ce sens. Parallèlement, alors que le programme de maths du lycée a été allégé, que l'horaire de mathématiques en DEUG a diminué (avec notamment l'introduction de l'enseignement de l'informatique), le programme (théorique) du DEUG n'a pas subi de vraie décrue, l'étudiant étant censé se familiariser avec un grand nombre de concepts difficiles : peu de temps pour un programme chargé, ceci ne laisse pas beaucoup de marge de manœuvre à l'enseignant.

1.2 Un effort d'adaptation...

Le corps enseignant tente de s'adapter à cette évolution : en cours magistral, un effort est fait pour motiver, illustrer, expliquer les idées ; le programme réel est souvent une version allégée du programme initialement prévu ; de nouvelles activités apparaissent (comme les TP utilisant des logiciels de calculs formels). Un autre aspect de cette adaptation apparaît dans les sujets d'examens : on y voit un délaissement des questions de raisonnement, qui conduisent à un taux de réussite trop bas, au profit d'exercices types, favorisant l'apprentissage de recettes, et de questions de cours de pure mémorisation.

1.3 ...et un relatif échec : l'enseignement perd son sens et son utilité.

Cette évolution dans les sujets d'examen montre que, d'une certaine manière, c'est la résignation qui l'a emporté : nous avons en grande partie renoncé à obliger les étudiants à comprendre des choses profondes, et il est tout à fait possible de décrocher son diplôme en n'ayant fait qu'effleurer les concepts difficiles du programme. Le contenu des programmes actuels du DEUG a évidemment un sens mathématique profond, mais y accéder nécessite un recul que n'ont pas les étudiants.

Ici se pose la question de savoir pourquoi on enseigne ; si on enlève les réponses absurdes (par exemple, “le but est de préparer les étudiants à l'examen”), il y a en gros deux types d'objectifs sensés : on enseigne pour aider les individus à se construire (l'apprentissage comme émancipation), ou bien on enseigne pour que les individus puissent être utiles à la société. Il est évident qu'un apprentissage superficiel passe totalement à côté du premier objectif ; mais même si on se limite à l'objectif utilitaire, on s'aperçoit que la fragilité des connaissances les rend totalement inapplicables.

L'échec généralisé des meilleurs étudiants issus du DEUG dans les licences de maths illustre également ce point de vue ; cet échec est d'ailleurs tout à fait logique, puisque le chemin à franchir du lycée à la licence augmente, les prérequis à l'entrée en licence n'ayant pas diminué. Notons que l'arrivée en licence d'élèves issus des classes prépas joue aussi un rôle.

2 Diagnostic (hypothèses sur ce qui ne passe pas dans l'enseignement actuel)

Résumé de cette partie : Si l'on admet que cet échec n'est pas forcément inéluctable (notamment, que les étudiants n'en sont pas les seuls responsables), on s'aperçoit que le pas que nous avons fait en direction des étudiants en nous “adaptant” à leur évolution est largement insuffisant : le passage du lycée à l'université est une plongée dans un bain de formalisme qui se transforme souvent en noyade !

[1] le service annuel est passé de 150h à 192h.

La métaphore musicale.
Imaginez...
Vous êtes tranquillement installé dans l'auditorium, à attendre le début du concert. Le noir se fait progressivement dans la salle, la scène s'éclaire : ça va commencer ! D'ailleurs, le chef d'orchestre apparaît sur la scène et s'adresse au public :
" – Mesdames et messieurs, j'ai le regret de vous annoncer que, pour une raison indépendante de notre volonté, les musiciens ne peuvent pas être présents devant vous ce soir. Soyez sûrs que je comprends votre déception, mais si vous y réfléchissez objectivement, vous devez admettre que ceci n'a pas vraiment d'importance : la musique que nous devions vous interpréter est contenue tout entière dans la partition ; nous allons vous projeter cette partition sur un écran, et je vous aiderai en commentant les passages difficiles. Ceci aura même l'avantage de permettre à chacun sa propre interprétation, au lieu d'être contraint d'adopter la nôtre !"

2.1 Un potentiel gaché

Nous pensons que la plupart des étudiants ont la capacité d'apprendre des mathématiques intéressantes. Il s'agit d'un postulat qui est loin de faire l'unanimité, mais remarquons qu'il est bien plus intéressant que le postulat contraire ; qu'on peut en discuter la formulation ("la plupart"... ?), mais beaucoup d'étudiants ne réussissent pas à maîtriser les concepts malgré beaucoup de goût pour les maths et un investissement personnel constant, et ce gachis d'énergie devrait nous amener à nous demander s'il n'est pas possible de les aider à mieux récolter les fruits de leur travail.

Voici l'énoncé d'un exercice de DEUG[2] :

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \cdots a_{n+1}$, $n+1$ nombres réels *distincts* et $b_1, \cdots b_{n+1}$, $n+1$ nombres réels quelconques. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant les conditions :

$$(1) \qquad P = 0 \text{ ou } d^0 P \leq n, \quad P(a_i) = b_i \text{ pour } i = 1, \cdots, n+1.$$

a. Démontrer que s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (1), alors P est unique.

b. Pour $i = 1, \cdots, n+1$, on pose $P_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \dfrac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Démontrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (1), de la forme $P = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n+1} P_{n+1}$, où les λ_i sont des constantes que l'on déterminera.

Application : déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $d^0 P \leq 3, P(0) = -7, P(1) = -3, P(2) = 3$ et $P(3) = 11$.

Nous demandons au lecteur d'essayer de le lire avec les yeux d'un étudiant de première année. Combien d'entre eux, même remplis de bonne volonté, sont capables de tirer profit d'un tel énoncé ? Pour avoir accès au sens de l'exercice, l'étudiant doit décrypter un "langage convenu, stéréotypé et sans franchise, commandé par une orthodoxie", définition de la langue de bois[3]...

2.2 Le point de vue du mathématicien

Comment expliquer l'échec des étudiants si on refuse de le mettre sur le compte d'une incapacité chronique à faire des maths ? Nous pensons que malgré les efforts d'adaptation, les mathématiciens

[2]Il s'agit bien sûr d'un "vrai" énoncé, qui a été donné tel quel aux étudiants.
[3]Selon le dictionnaire de l'Académie Française, http ://www.academie-francaise.fr/dictionnaire/.

ont tendance à oublier que leur point de vue n'est pas naturel ; or l'enseignement actuel ne s'adresse trop souvent qu'à des étudiants qui auraient adhéré à ce point de vue sans se poser de questions.

La distance qui sépare l'attitude des étudiants de celle des mathématiciens apparaît dans les résistances et les incompréhensions : "est-ce qu'on doit vraiment démontrer ça ?", "il faut vraiment utiliser la définition de la limite ?", "c'est évident !"...[4]

Un des buts du DEUG devrait être d'amener les étudiants à rentrer dans le formalisme, à en comprendre la nécessité et la richesse, à accepter ses règles contraignantes ; et aussi à comprendre les liens subtils entre formalisme et intuition, rigueur et imagination (solfège et musique !), à savoir passer du plan intuitif au plan formel (transformer une idée en preuve) et réciproquement (lire un cours et se construire une représentation des concepts).

Mais il ne faut surtout pas considérer que les étudiants qui arrivent à l'université ont déjà franchi ces obstacles[5].

3 Tentative de réaction : quelques remarques générales

Le commentaire suivant, suscité par les enseignements du primaire et du secondaire, nous paraît également pertinent pour l'université :

> *"De plus en plus d'élèves sont en dehors de la logique des savoirs. Or pour que l'école fonctionne, il faut partir des élèves tels qu'ils sont (et ne pas y rester...). Ce qui pose le redoutable problème du sens du savoir qu'on enseigne et du plaisir qu'on peut y trouver, pour les élèves et pour nous enseignants (...). Le rôle des enseignants n'est pas d'enseigner, mais de faire que les élèves apprennent (...). Si l'élève n'est pas mobilisé intellectuellement, l'enseignant est complètement démuni."*
>
> Bernard Charlot, professeur de sciences de l'éducation à l'université Paris VIII Saint-Denis.

3.1 Avoir sans cesse à l'esprit que notre tâche principale est de motiver les étudiants

Nous ne nions pas le fait que beaucoup d'étudiants ont une attitude passive en cours ou en TD, que certains viennent avec l'idée qu'on peut apprendre des maths comme on regarde la télévision, ni les comportements que cette croyance induit vis-à-vis des enseignants ; mais nous pensons encore une fois que ces attitudes ne sont pas inéluctables, qu'elles doivent nous questionner ; que les étudiants ont un potentiel de curiosité intellectuelle qu'on a tendance à largement sous-évaluer et surtout à sous-utiliser.

En particulier, si on accepte de se mettre cinq minutes dans la peau d'un étudiant moyen, il faut bien admettre que ce qu'on lui propose est d'aspect rébarbatif ; s'il n'arrive pas à dépasser l'aspect formel, notre enseignement le met dans la situation de quelqu'un qui apprendrait le solfège sans jamais faire de musique !

[4]Un type d'activité désarçonne particulièrement les étudiants, celui qui consiste à "jouer à ne pas savoir" : par exemple, quand on explique la construction des nombres complexes à des étudiants qui "savent bien" que les nombres complexes existent, puisqu'ils les ont déjà rencontrés ! (et qui savent bien que 0x1=0 ! !)

[5]Des réactions d'enseignants du secondaire au nouveau programme de première S mettent à jour de manière éloquente l'obstacle constitué par l'apparente contradiction entre rigueur et intuition : "La réaffirmation de l'importance de la rigueur et la démonstration comme principes mathématiques de base est fortement appréciée *mais apparaît en contradiction avec un recours fréquent à l'intervention de l'intuition*" (c'est nous qui soulignons, voir http ://www.eduscol.education.fr/D0015/default.htm).

L'idée d'apprentissage sans plaisir est presque antinomique, et d'autant plus absurde que le plaisir à faire des mathématiques est certainement un des moteurs de la recherche. Comment faire en sorte, sans démagogie, qu'il devienne aussi un moteur de l'enseignement ?

3.2 Les étudiants sont divers, il faudrait diversifier les angles d'approche

Le plaisir de faire des mathématiques peut revêtir des formes diverses : plaisir ludique, plaisir de la découverte et de l'exploration, plaisir de la compréhension, de la contemplation d'une théorie harmonieuse, qui cohabitent d'ailleurs dans l'activité du chercheur.

Il est possible de proposer aux étudiants, en plus des exercices habituels, des activités dont le sens est plus immédiatement perceptible que celui contenu dans les exercices purement techniques. Ce point de vue est bien sûr illustré par les exercices de la base de données.

Il nous semble qu'il y a même deux catégories d'étudiants pour lesquels un enseignement centré sur la technique peut produire des catastrophes. La première concerne les futurs profs de maths, qui risquent dans ces conditions de garder une idée véritablement fausse, parce que trop partielle, de la discipline qu'ils enseignent (comme, par exemple, de ne pas être conscient de l'importance de l'aspect expérimental, au sens large, dans les mathématiques en train de se faire ; voir aussi la note 5, partie 2.2). La deuxième concerne les étudiants dont les mathématiques ne sont pas la discipline principales : ceux-ci sont souvent très réfractaires aux aspects techniques, mais plus sensibles aux applications ; un cours de maths classique est ici totalement inapproprié, et le manque d'effort des mathématiciens pour se mettre à la portée de leur public est en partie responsable de la sous-utilisation des maths dans les autres disciplines (et des réductions du volume horaire affecté aux maths dans les enseignements).

3.3 Les applications peuvent aider à donner un sens aux concepts

Nous voudrions développer le point suivant : on ne fait pas assez l'effort de chercher à présenter à tous les étudiants des applications des concepts enseignés, notamment des applications externes aux mathématiques. Pourtant, il y a là une grande source de motivation à exploiter. Il nous semble qu'une partie du travail de modélisation devrait être intégrée aux cours de maths ; ceci permettrait de faire sentir la puissance des concepts mathématiques, leurs origines, et leur généralité (qui est une des raisons pour étudier des concepts apparemment très abstraits et déconnectés du réel). [6]

Voici un exemple. L'enseignement de l'algèbre linéaire est connu pour être très délicat, en particulier parce que difficile à motiver (*a posteriori*, la théorie permet d'unifier une quantité impressionnantes de problèmes, et de donner un point de vue géométrique ; mais comme chaque problème particulier pourrait être résolu avec des systèmes d'équations linéaires, aucun ne suffit à justifier *a priori* l'investissement énorme qui est demandé à l'étudiant). Dès que la théorie est suffisamment avancée, on devrait donc proposer aux étudiants beaucoup d'applications, les plus variées possibles. Par exemple, une grande quantité de problèmes conduisent, par une modélisation simple, à des systèmes dynamiques linéaires (problèmes de flux, évolution de la population d'un pays, de la fréquence d'un gène dans une population : voir par exemple les exercices *Systèmes dynamiques linéaires*[7], *Gènes sur les chromosomes sexuels*[8]), dont l'étude utilise la réduction des endomorphismes ; or ces problèmes sont très rarement présentés aux étudiants, qui sont pourtant des experts en calculs de puissances d'une matrice...

[6] Remarquons aussi que le développement des liens avec les autres disciplines scientifiques correspond à une tendance importante de la recherche mathématique actuelle.

[7] http ://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_navigable/systemes_dynamiques_lineaires.pdf

[8] http ://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_navigable/chromosomes-sexuels.pdf

Un autre exemple, dans le même ordre d'idée, concerne les équations différentielles : souvent, en DEUG, elles n'apparaissent que sous forme d'équations différentielles linéaires, comme un problème purement algébrique qu'on résoud en appliquant les techniques de réduction des endomorphismes (et la plupart du temps sans faire un seul dessin). C'est l'exemple typique de théorie très proche des applications, et paradoxalement inutilisable en dehors du contexte stéréotypé des exercices de TD[9]. Pour que cet enseignement ait un sens, il faudrait partir de beaucoup plus loin (exemples de problèmes d'origine les plus diverses possibles conduisant à des équations différentielles, notion d'espace des phases) et surtout accepter d'y revenir (qu'apporte la théorie sur le problème de départ ?).

Ces deux exemples ont en commun de permettre d'expliquer pourquoi le mathématicien fait sa théorie dans un espace de dimension quelconque, et pas seulement dans notre espace tridimensionnel, point de vue que beaucoup d'étudiants ont du mal à admettre faute d'avoir touché du doigt la justification concrète : l'espace du mathématicien qui étudie un modèle est rarement l'espace physique, mais bien plus souvent un espace de paramètres qui n'ont pas de raison de se limiter à trois...

Insistons sur le fait que le propos n'est pas du tout de justifier les mathématiques au yeux des étudiants, mais de donner à voir des "chaînes de sens" les plus longues possibles.

Soulignons une difficulté : nous-mêmes, enseignants, sommes passés par cet apprentissage qui n'explore pas les liens avec les autres disciplines ; bien souvent, ces liens nous sont inconnus ! D'où la nécessité de mettre en commun nos trouvailles pour sortir de ce cercle vicieux.

3.4 Poser les questions avant de donner les réponses.

Dans le discours logique, et souvent aussi dans le discours scolaire, les définitions des objets mathématiques sont un point de départ ; or historiquement, elles sont au contraire le résultat d'une longue réflexion, un "elixir" selon le mot de Jean-Pierre Kahane.[10] Ce qui est naturel, c'est de vouloir résoudre des problèmes, répondre à des questions ; par contre, il est raisonnable de refuser d'apprendre un concept difficile si on n'en voit pas l'utilité. L'étudiant ne peut bien sûr pas refaire tout le cheminement historique ; mais le plus souvent possible, on devrait prendre le temps de le laisser réfléchir à un problème qui motive le concept qu'on souhaite introduire. Dans

[9] En tout cas inutilisée : demandez aux étudiants si il leur est déjà arrivé de diagonaliser une matrice pour résoudre une équation différentielle dans un exercice de physique...

[10] Voici une explication lumineuse de ce point : "Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.

En plus des vertus scientifiques qu'on lui connait, elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement. Elle permet à chaque instant de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites et, ainsi, d'organiser l'acquisition de nouveaux savoirs à l'aide des acquisitions antérieures. Elle promet donc à l'étudiant et à son professeur un moyen d'ordonner leur activité et d'accumuler dans un minimum de temps un maximum de "savoirs" assez proches du "savoir savant". Évidemment, elle doit être complétée par des exemples et des problèmes dont la solution exige la mise en œuvre de ces savoirs.

Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés et des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits, et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le "vrai" fonctionnement de la science impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une génèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissus d'activité où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent *transposition didactique* cette opération. Elle a son utilité, ses inconvénients et son rôle, même pour la construction de la science. Elle est à la fois inévitable, nécessaire et en un sens, regrettable. Elle doit être mise sous surveillance." Guy Brousseau (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2) 33-115. Et aussi dans *Théorie des situations didactiques*, Guy Brousseau, La pensée sauvage éditions, 1998.

cette optique, l'idéal serait de remplacer tous les cours magistraux par des cours-TD intégrés ; mais puisque, pour des questions de gros sous, ceci ne semble pas être au menu dans un avenir proche, on devrait essayer de réfléchir à la possibilité de rendre les cours magistraux compatibles avec cette approche.

A une échelle plus petite (donc plus facile à mettre en place), beaucoup de définitions ou de théorèmes qui interviennent dans le cours sont des variantes de notions introduites précédemment ; là encore, il pourrait être fructueux, par exemple, de laisser les étudiants écrire seuls les définitions concernant les limites infinies après qu'on leur ait donné celles des limites finies, ou d'imaginer les énoncés des théorèmes d'intervertion sur les séries lorsqu'ils connaissent ceux sur les suites. Ces activités vont dans le sens d'une appropriation du formalisme par l'étudiant (et faciliteraient bien sûr la mémorisation).

Dans le même ordre d'idées, les TP sur machines devraient permettent de développer les activités expérimentales (voir par exemple l'exercice *Trouver la plus grande valeur propre par une méthode itérative*[11]).

En tout cas, le respect trop strict de l'ordre sacro-saint "définitions-théorèmes-exercices d'application" nous semble un des facteurs qui contribue le plus à tuer la curiosité naturelle des étudiants sur laquelle l'enseignement devrait s'appuyer, et à encourager les attitudes passives.

3.5 Faire en sorte que la démonstration devienne le plus possible une nécessité intérieure, le moins possible un acte imposé par le jeu scolaire.

A l'origine, les idées de démonstration et de langage formel ont été inventées dans le but d'obtenir un discours dénué de toute ambiguïté, que chacun peut utiliser pour se convaincre (et convaincre les autres) de la véracité d'une affirmation.

On constate que dans le cadre scolaire, ces idées originelles sont totalement détournées. Ils est rare que les étudiants ressentent le pouvoir convainquant des démonstrations qu'ils subissent en cours, ce qui est compréhensible vu leur difficulté à rentrer dans le formalisme utilisé (et donc leur incapacité à distinguer une preuve juste d'une "preuve" fausse) ; et celles qu'ils produisent en retour viennent d'une demande de l'enseignant (qui en général est pourtant déjà convaincu du résultat à prouver ! !).

Voici un exemple particulièrement frappant qui illustre ce rapport tordu à la démonstration : dans un examen, en question de cours, on demande de prouver l'unicité dans la division euclidienne. Beaucoup d'étudiants ont écrit en réponse quelque chose qui ressemble d'assez près à la preuve donnée dans le cours ; mais aucun n'a utilisé au cours de la preuve l'argument-clé, à savoir le fait que le degré du reste est strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise ! Ici, le contexte scolaire conduit à une parodie d'activité mathématique... [12] [13]

La démonstration est pourtant un outil fondamental des mathématiciens, auquel nous refusons tous de renoncer. Nous proposons quelques pistes :

- Dans un monde idéal, l'enseignant n'exigerait jamais qu'un étudiant démontre un énoncé donné ; au contraire, on devrait arriver à ce que l'étudiant ressente *de lui-même* le besoin d'écrire des démonstrations...

[11] http ://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_navigable/valeur-propre-iterative.pdf

[12] Au passage, ceci montre aussi que le problème n'est pas tellement que "les étudiants ne travaillent pas", mais plutôt qu'une grande partie de leur travail n'a pas de sens.

[13] Remarquons qu'on rencontre des problèmes similaires en sciences expérimentales : en Travaux Pratiques, l'élève qui n'obtient pas les bonnes valeurs est souvent pénalisé, ce qui l'incite à ajuster ses mesures à la théorie ; que peut-il alors comprendre de la démarche scientifique ?

- Dans le monde réel, *on devrait éviter au maximum de demander à un étudiant de prouver un énoncé sans incertitude* : la présence d'une incertitude (par exemple sur les hypothèses exactes, ou sur le résultat d'un calcul) doit redonner un sens à la recherche d'une preuve. On peut ainsi imaginer de donner des énoncés avec des "hypothèses à trous"[14] (voir par exemple la partie démonstration de l'exercice *Trouver la plus grande valeur propre par une méthode itérative*[15]). Il y a là tout un travail astucieux de reformulation des énoncés d'exercices à effectuer.

Soulignons un point important : l'incertitude peut être petite, mais elle ne doit pas être factice, comme dans l'exemple suivant (donné à un examen) :

Exercice. Soient $r = (r_n)_{n\geq 0}$ et $s = (s_n)_{n\geq 0}$ les suites réelles définies par :

$$r_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \text{ et } s_n = r_n + \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1.$$

a. Les suites r et s sont-elles adjacentes ?
b. Les suites r et s sont-elles convergentes ? (On ne demande pas leurs limites.) Si oui, trouver une valeur de n telle que le nombre r_n représente les limites des suites r et s avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

Si la difficulté est telle qu'on ne peut pas vraiment transformer l'exercice en exercice ouvert, mieux vaut sans doute garder le traditionnel "montrer que..." (ou changer complètement d'exercice !).

Dans le même ordre d'idées, on a souvent beaucoup de mal à expliquer à un étudiant pourquoi la preuve qu'il propose n'est pas satisfaisante, justement parce que le jeu auquel on joue, c'est-à-dire le pourquoi de la démonstration, n'est pas clair ; cette difficulté disparaît si le manque de rigueur le conduit à un énoncé faux.

- Pour que les étudiants ne cèdent pas à la tentation de mémoriser sans comprendre, les preuves demandées en "questions de cours" ne devraient jamais se présenter exactement sous la forme donnée en cours : on peut ainsi demander aux étudiants d'écrire la démonstration dans un cas particulier, ou dans un contexte un peu différent. [16]

- Il faudrait garder à l'esprit que la démonstration prend tout son sens lorsque l'on prouve des propriétés surprenantes ; on ne peut pas espérer faire ressentir aux étudiants la nécessité des démonstration en leur prouvant, au tout début de leur séjour à l'université, que la limite de la somme est égale à la somme des limites, propriété qu'ils connaissent depuis longtemps. On peut penser que leur conviction que cette propriété est vraie est fondée sur l'habitude et que c'est une mauvaise raison, mais, encore une fois, nous devons partir des étudiants tels qu'ils sont. Sans doute devrait-on attendre un peu avant de les faire goûter à ce genre de preuves, dont le rôle est parfaitement clair une fois qu'on a acquis une certaine maturité mathématique ; et si on ne peut pas s'en passer, on devrait au moins prendre des précautions, admettre qu'il s'agit d'un jeu très particulier, qui peut dans un premier temps paraître artificiel.

- Le travail en groupe peut aussi contribuer à réhabiliter la fonction de persuasion de la démonstration, si l'on arrive à obtenir que tous les étudiants d'un groupe donné comprennent complètement tout ce que produit le groupe, ce qui obligerait chacun à trouver un moyen pour convaincre les autres de la justesse de ses idées. Plus généralement, on devrait développer les activités pouvant favoriser le dialogue mathématique entre les étudiants.

[14] Dans la formulation ci-dessus de l'exercice sur les polynômes de Lagrange (paragraphe 2.1), le rédacteur a précisé (et souligné !) l'hypothèse disant que les abscisses doivent être deux à deux distinctes ; or il s'agit d'une hypothèse dont on voit très facilement la nécessité, qu'on peut donc demander aux étudiants de découvrir par eux-mêmes ; au contraire, il est très probable qu'avec un tel énoncé les étudiants ne se posent pas de question, et donc ne perçoivent pas la raison d'être de cette hypothèse !

[15] http ://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_navigable/valeur-propre-iterative.pdf

[16] En recherche également, on ne s'approprie vraiment une démonstration difficile qu'en ayant essayé de la recycler, ce qui permet de voir précisément où sert chaque hypothèse.

3.6 En permanence, penser à aider l'étudiant à comprendre "à quoi on joue"

Les problèmes de langages sont rarement explicités : que signifie "résoudre une équation" ? Qu'est-ce qu'une conjecture, un axiome, une hypothèse plus forte ou plus faible, un théorème plus faible ou plus fort ? Pourquoi le prof pense-t-il que la conclusion "la série converge si α est supérieur à 0" ne donne pas la réponse pour toutes les valeurs de α ?

Un problème proche provient de la diversité des niveaux de signification auxquels on se situe : niveau formel (le discours mathématiques proprement dit)[17], niveau intuitif (qui donne son sens au discours mathématique), niveau méthodologique (le discours sur le discours), *etc...*

Voici un exemple. Quand on expose la résolution d'un exercice, on a souvent un double objectif : expliquer la solution, et expliquer comment on a trouvé la solution (ou plutôt, comment l'étudiant aurait pu la trouver). Le deuxième objectif est clairement aussi important que le premier ; malheureusement, il passe souvent au second plan : fondamentalement, parce que dans la tradition mathématique, exposer la preuve "sèche" est considéré comme suffisant (Gauss pensait même que le mathématicien, une fois sa construction achevée, se doit de faire disparaître les échaffaudages !)[18] ; et aussi parce que c'est beaucoup plus difficile à expliquer.

En pratique, on se contente souvent de commentaires oraux, dont les étudiants ne retirent pas grand'chose : puisque le prof ne l'écrit pas noir sur blanc, c'est que ça doit être accessoire... Pour souligner l'importance du "comment on trouve", il pourrait être intéressant d'essayer d'y consacrer une plus grande place au tableau ; on pourrait envisager de dinstinguer clairement, de manière assez systématique, les preuves formelles des commentaires.

En règle général, on devrait peut-être expliciter plus souvent ces difficultés. Les exercices proposés illustrent également ce point de vue.

4 Tentative de réaction : quelques remarques pratiques

4.1 But du serveur d'exercices

Le but est d'obtenir un certain renouvellement du stock d'exercices de DEUG, dans le sens d'une diversification des activités et des points de vue. Un des avantages de cet objectif est qu'il est suffisamment peu ambitieux pour qu'on puisse immédiatement y travailler concrètement ; ceci est évidemment aussi un de ses défauts. En particulier, il y a certainement bien des choses à repenser dans le contenu mathématique du DEUG ; cependant, réfléchir aux exercices peut éventuellement aider à préparer des changements plus importants ?

Voici quelques principes pratiques concernant plus particulièrement les exercices.

4.2 Faire l'effort d'expliciter les objectifs pédagogiques de chaque feuille d'exercice

En tant qu'enseignant, ceci nous semble indispensable à la fois pour soi-même, pour les collègues qui liront l'exercice, et pourquoi pas pour les étudiants. Ceci permet d'organiser les séances d'exercices selon une certaine progression, de ne pas oublier de traiter certaines notions, d'éviter de

[17] En fait, le discours n'est jamais complètement formalisé : il s'agit donc plutôt d'un niveau semi-formel, ce qui complique encore la situation ; d'autant que le degré de formalisation dépend fortement du contexte mathématique (comparer les preuves classiques de théorie des ensembles, d'algèbre ou d'analyse) et du contexte social, c'est-à-dire des connaissances et de la maturité mathématique du public visé (comparer un article de recherche à un livre de DEUG) ; sans compter l'influence de l'humeur du professeur...

[18] C'est d'ailleurs le point de vue demandé aux étudiants aux examens.

présenter plusieurs difficultés nouvelles d'un seul coup, d'évaluer l'enseignement (et pour l'étudiant, de s'auto-évaluer). Ceci devrait permettre aussi de travailler sur le "à quoi on joue" (voir la partie 3.6), en explicitant certaines règles du jeu, qui peuvent changer d'un exercice à l'autre. [19]

4.3 Reformuler les exercices

Le contenu mathématique des exercices classiques n'est pas en cause, mais :
- pour y accéder, l'étudiant doit souvent franchir un barrage de formalisme ;
- les énoncés sont souvent présentés sous forme fermée : "Montrer que..." ; il faudrait introduire partout un minimum d'incertitude.

Si l'on souhaite vraiment que l'étudiant s'approprie le formalisme, il faut lui proposer des exercices où c'est à lui de formuler de manière précise certaines définitions, certains énoncés. Dans cette optique, voici une reformulation de l'exercice sur les polynômes de Lagrange (voir la partie 2.1) ; cet énoncé était prévu pour un travail en petits groupes, sur une durée importante (plus de deux heures), en présence d'un professeur. Bien sûr, on peut imaginer des formulations intermédiaires entre celle-ci et celle de la partie 2.1.

> Voici un sujet ouvert (inhabituel), avec un énoncé vague, où votre premier travail sera d'expérimenter pour essayer de transformer cet énoncé vague en un énoncé précis, le plus intéressant et le plus "joli" possible ! Autrement dit, d'apprendre à "fabriquer" l'énoncé d'un théorème...
> **Quelqu'un aurait-il vu passer un polynôme ?** Voici une question vague : si on se donne un certain nombre de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, y a-t-il des polynômes dont le graphe passe par ces points ? Y en a-t-il toujours, y en a-t-il un seul ou plusieurs, et quand il en existe, peut-on trouver une formule les donnant ?
> Voici quelques suggestions comme pistes de recherche (avec l'idée : quand un problème est trop difficile, il faut essayer de le simplifier en commençant par des cas particuliers...) :
>
> – Avez-vous une idée intuitive de la réponse ?
> – Essayer avec 2 points. Comment peut-on formuler le résultat dans ce cas -là ? Essayer de donner le "meilleur" énoncé possible.
> – Essayer avec trois points ?
> – Essayer avec quatre points, mais situés sur l'axe des abscisses ; puis **quatre points dont trois sont sur l'axe des abscisses** ; puis quatre points dont deux sont sur l'axe des abscisses ! Puis résoudre le cas avec quatre points.

4.4 L'étudiant doit-il "avoir appris son cours" avant le TD ?

Souvent, au début du semestre, on exige des étudiants qu'ils sachent leur cours en arrivant en TD. Quelle que soit la vigueur qu'on mette dans cette exigence, on constate qu'au fil des TD elle est de moins en moins respectée, et on est conduit soit à continuer à faire comme si les étudiants connaissaient leur cours (et on incite ainsi les étudiants à faire semblant de comprendre), soit à réexpliquer rapidement en début de séance les techniques utiles au TD. Dans les deux cas, ceci contribue à répandre parmi les étudiants l'idée que le cours est à la fois incompréhensible et inutile.

[19] À un niveau plus global, il est ahurissant de constater que les objectifs des modules d'enseignement sont très rarement explicités, et jamais expliqués aux enseignants débutants. Par exemple, le rôle des enseignements utilisant des logiciels de calculs formels n'est pas éclairci : s'agit-il d'apprendre à maîtriser le logiciel, ou juste de l'utiliser pour faire les calculs dans les exercices classiques, ou de l'utiliser pour faire des maths expérimentales ?

Il faudrait sans doute repenser ce rapport entre cours et TD. Pour la plupart des étudiants, digérer l'abstraction d'un cours de maths sans l'aide des TD est impossible ; et l'exigence ci-dessus conduit au mieux (avec beaucoup de bonne volonté) à une mémorisation stérile. Il serait beaucoup plus intéressant d'admettre cette impossibilité, et d'inciter les étudiants à chercher les exercices en lien étroit avec leur cours, en le consultant le plus souvent possible, les exercices aidant à le comprendre. Ce point de vue devrait se ressentir sur les énoncés des exercices. On peut effectivement demander aux étudiants d'avoir une certaine connaissance du cours avant le TD, à condition de se limiter à des objectifs partiels et précis (par exemple en leur fournissant une liste de questions "simples", qui leur donne des angles d'attaque) ; on pourrait aussi essayer qu'il y ait une relecture du cours immédiatement après un TD.

4.5 Le problème du temps

Les exercices classiques ont l'avantage de permettre un enseignement relativement rapide d'outils sophistiqués (voir la citation de Guy Brousseau dans la note 10, partie 3.4). Comme toute tentative d'apprentissage plus robuste, les exercices "alternatifs" que nous proposons sont souvent beaucoup plus coûteux en temps.

Face à la double contrainte horaires légers/programme chargé, ceci rend difficile le recours fréquent aux exercices non classiques (et peut susciter l'opposition de certains collègues).

Pour contourner ces contraintes en douceur, une possibilité consiste à utiliser les modules optionnels du DEUG (voir par exemple l'expérience du module *Culture Mathématique* en DEUG MIAS à Orsay). On peut aussi utiliser les "Devoirs à la Maison"[20].

Bien entendu, il nous semble également souhaitable de diversifier les exercices des TD usuels. On peut espérer que la perte en quantité sera compensée par un gain en qualité ; et la motivation et l'éclairage apportés par les exercices "alternatifs" peuvent rendre plus efficaces les activités plus techniques.

4.6 Résistances

Si l'on veut vraiment faire passer cette diversification dans les mœurs (des enseignants et des étudiants), il faudra sans doute atteindre une certaine masse critique : si on se contente de proposer un exercice différent de temps en temps, il sera juste ressenti comme un exercice bizarre : "d'ailleurs, il n'y en a pas dans les annales d'examens"... Ce qui nous amène à une deuxième condition : tout changement de pratique, pour être adopté, doit avoir une répercussion d'une manière ou d'une autre sur l'examen[21]. Il faudrait donc introduire explicitement des questions plus ouvertes dans les énoncés, ce qui nécessite des épreuves plus longues (en temps, pas en quantité d'exercices). Au passage, cela pourrait contribuer à diminuer l'importance excessive donnée à la rapidité : notre but n'est pas de former les étudiants à passer des concours, et l'université devrait pouvoir affirmer le droit à une certaine lenteur.

5 En guise de conclusion

L'apprentissage des maths en DEUG est centré sur la technique, ce qui est peu motivant pour les étudiants, et aboutit à des connaissances trop superficielles pour faire sens, trop fragiles pour

[20] Les DMs sont souvent massivement boycottés par les étudiants ; il ne serait donc pas ridicule d'essayer de les rendre plus motivants.

[21] Pour éviter les gros couacs, on peut envisager d'"expérimenter" sur les épreuves moins importantes : tests, interros...

être utilisables.

Pour remédier à cette situation, il faudrait accepter de passer un temps conséquent à utiliser le reste de la riche palette du mathématicien : exploration, expérimentation sur papier ou sur ordinateur, simulation, visualisation, formulation de conjectures, invention de contre-exemples, écriture de démonstrations, contrôle de la cohérence des résultats obtenus, application des concepts à des situations extérieures aux maths, analyse des limites des concepts et des techniques...

Pour avancer concrètement dans cette direction, nous proposons de réfléchir aux exercices soumis aux étudiants, et d'essayer d'enrichir massivement le stock d'énoncés. Le but central de cette page Web est donc de proposer des exercices sur lesquels un effort de renouvellement (petit ou grand) a été fait.

Ce renouvellement n'aura un sens que s'il atteint une certaine masse critique ; or l'invention de nouveaux exercices ou la reformulation des anciens n'est pas une entreprise facile. Ce serveur espère devenir un lieu de mise en commun des efforts du plus grand nombre d'enseignants.

Conclusion : COPIEZ NOS EXOS ! ENVOYEZ-NOUS LES VÔTRES !

Suggestion pratique : on pourrait adopter la "règle" suivante, qui obligerait à un renouvellement minimal mais constant : *chaque feuille d'exercices qu'un enseignant propose aux étudiants doit comporter au moins un exercice inventé (ou en tout cas largement reformulé) par l'enseignant.*

Corollaire : à chaque nouvelle feuille notre base d'exercices doit grossir un peu...

Sources

De nombreuses idées, chipées au cours de lectures ou de discussions, ont été réutilisées dans ce texte. En vrac et en oubliant certainement bien des sources d'inspiration, citons : le programme des classes préparatoires (http ://prepas.org/ups/maths/progs/index.html) ; des exposés de Marc Legrand au CIES de Grenoble ; le livre introuvable de la commission inter-IREM, *Enseigner autrement en DEUG de maths première année* (ou quelque chose comme ça) ; le *dictionnaire des mathématiques élémentaires* de Stella Baruk (et surtout l'introduction qui est un vrai bonheur) ; La *Théorie des situations didactiques* de Guy Brousseau, et notamment le texte introductif (analyse de la découverte, par des enfants, de la démonstration de théorèmes concernant le jeu "la course à 20") ; les textes de la Commission sur l'enseignement des mathématiques (http ://smf.emath.fr/Enseignement/index.html) ; l'exposé de Jean-Pierre Kahane à l'Université de Tous Les Savoirs ; une interview de Bernard Charlot dans le magazine de la FSU ; le fabuleux petit livre de Jean-Marc Levy-Leblond, *La physique en question : mécanique* (voir par exemple http ://www.udppc.asso.fr/nouveautes/fourniss/livres/lli199903.htm#physique_en_question_meca) ; un article de Jean Bricmont et Diana Johnstone dans le *Monde Diplomatique* d'août 2001, L'astrologie, la gauche et la science ; sans oublier les discussions avec les collègues, et les échanges avec les étudiants...