Exercices Alternatifs

Classés par angle pédagogique.

9 mars 2007

Résumé

Les exercices de maths actuellement proposés aux étudiants en DEUG accordent une place disproportionnée à l'aspect technique. Mais les exercices "alternatifs" sont difficiles à trouver ou à concevoir. La base de donnée *EXEMAALT* veut mettre à la disposition de tous les enseignants les efforts de chacun. Nous suggérons l'adoption de la "règle" suivante, qui obligerait à un renouvellement minimal mais constant : *chaque feuille d'exercices qu'un enseignant propose aux étudiants doit comporter au moins un exercice inventé (ou en tout cas largement reformulé) par l'enseignant.*

ENVOYEZ-NOUS VOS EXERCICES ![1]

Ce recueil d'exercices est disponible sur le Web, sous différents formats, à l'adresse suivante :

`matexo.emath.fr/exemaalt`

Pour plus de détails sur les objectifs d'EXEMAALT, voir le texte d'exposé des motivations : *EXEMAALT, un serveur d'exercices de maths "alternatifs" : pour quoi faire ?* disponible sur le serveur.

Précisons que *ce recueil est destiné aux enseignants*, et que son but est plus de proposer des pistes et des idées que des exercices figés (les exercices devant la plupart du temps être reformulés en fonction du contexte). Enfin, il s'agit d'un recueil en gestation, qui grossit au fur et à mesure que vous nous envoyez des exercices : certains thèmes du programme de DEUG peuvent donc être (momentanément...) absents.

Table des matières

1. Bataille navale linéaire

Source: `Bataille-navale-lineaire.tex`.

Version imprimable: `Bataille-navale-lineaire.pdf`

Niveau: *DEUG première année.*

Objectifs et commentaires. *Dans cette activité, on utilise un jeu de type "bataille navale" pour amener les étudiants à se poser des questions sur la géométrie des sous-espaces vectoriels, et plus particulièrement sur la dimension.*

Réalisation pratique *Notons d'abord que contrairement à ce qu'on peut penser au premier abord, le jeu ne nécessite pas beaucoup de calculs, puisqu'on peut répondre à la plupart des questions à l'aide d'arguments de dimension : évidemment, l'un des buts de l'exercice est d'inciter les étudiants à utiliser ces raisonnements.*

[1] au format LaTeX, à l'adresse suivante : *exemaalt@acm.emath.fr* ; un fichier modèle et des explications sont disponibles sur le serveur.

[2] http://garp.univ-bpclermont.fr/guilde/Guilde/Licence/ldl.html

On suggère de grouper les étudiants par quatre, et de les faire jouer deux contre deux (et éventuellement plus tard quatre contre quatre). Par rapport à un affrontement "un contre un", ces configuration ont l'avantage de favoriser la confrontation des idées : le fait de ne pas être d'accord sur le coup à jouer devrait obliger les étudiants à justifier leurs propositions, donc à jouer plus rationnellement, voire à chercher une bonne stratégie. Et aussi, ceci diminue la fréquence des erreurs...

Il vaut probablement mieux commencer par jouer dans $\mathbb{R}^3$, où l'intuition aide beaucoup. Mais il serait dommage de ne pas jouer aussi dans $\mathbb{R}^4$, où l'étudiant doit justement remplacer son intuition défaillante par les raisonnements sur la dimension.

On peut préciser les règles au fur et à mesure des parties ; on suggère les règles additionnelles suivantes :

- *un joueur qui détecte une erreur dans la réponse de son adversaire à l'une de ses questions gagne la partie (y compris si la détection intervient longtemps après l'erreur) ;*
- *le joueur qui se trompe en annonçant la dimension perd la partie ;*
- *un joueur est autorisé à modifier son sous-espace vectoriel secret en cours de partie (y compris après que l'autre ait proposé une dimension) à condition toutefois que son nouveau sous-espace secret reste compatible avec ses réponses précédentes. L'intérêt de cette règle est d'obliger le joueur qui prétend avoir trouvé à être sûr de lui (et donc à chercher à démontrer que la dimension est ce qu'il pense). On pourrait aussi demander explicitement au gagnant, à la fin de la partie, de fournir une preuve que la dimension est ce qu'il affirme (mais ceci risque de rendre l'activité plus scolaire et moins ludique, ce qui est dommage).*

Complexité algorithmique *Après un peu de pratique, on peut suggérer aux étudiants de chercher un algorithme, par exemple en leur demandant comment on pourrait programmer un ordinateur pour qu'il trouve la réponse en temps fini dans tous les cas. Ceci est probablement assez difficile en DEUG, sans parler de la recherche d'une stratégie optimale : on peut ainsi transformer le jeu en un exercice de niveau licence... Voici des éléments de réponses (en note de bas de page pour ne pas contrarier le lecteur qui voudrait y réfléchir tout seul !).* [3]

Ce jeu est inspiré d'une bataille navale géométrique (non linéaire) proposée par Nicolas Bouleau dans le texte de sa conférence au colloque EM2000 sur l'enseignement des maths, Y a-t-il lieu d'envisager des mathématiques post-modernes ?

[3] **Quelques remarques sur la complexité** Pour un champ de bataille E de dimension n, quel est le nombre de coups nécessaires pour répondre dans tous les cas ? Voici une stratégie qui marche toujours en moins de n coups.

On choisit une base $B = \{e_1, .., e_n\}$. On regarde les parties F contenues dans B telles que $\mathrm{vect}(F) \cap E_1 = \{0\}$ (où E_1 est l'espace inconnu). On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces parties.

Lemme *Une partie maximale dans $\mathcal{F}$ est de dimension $n - \dim(E_1)$.*

Donc on cherche une partie maximale. L'algorithme est le suivant. On pose la question "$F = \mathrm{Vect}(e_1)$?" Si la réponse est "à l'eau", on prend $F_1 = \{e_1\}$; si c'est "touché", on prend $F_1 = \emptyset$. Puis on continue : à l'etape i, on pose la question "$F = vect(F_{i-1} \cup \{e_i\})$?", et on prend $F_i = F$ si "à l'eau", $F_i = F_{i-1}$ si "touché". Le n-ième ensemble F_n est maximal : en effet, le i-ième ensemble F_i est maximal pour l'ajout d'un des i premiers vecteurs (*i. e.* si on rajoute un des i premiers vecteurs à F_i, on touche E_1).

Remarquons aussi la différence entre le "presque sûr" et le "sûr" : si on fait une dichotomie sur la dimension (en proposant d'abord un espace de dimension $n/2$, *etc.*), on va trouver la dimension en temps $\log(n)$ pour presque tout sous-espace ; la complexité presque sure est en $\log(n)$, alors que c'est beaucoup moins évident pour la complexité "au pire".

Question *Y a-t-il un algorithme meilleur que celui proposé au-dessus ? Autrement dit, quelle est la complexité au pire ?*

(http://em2000.imag.fr/Actes/). Citons le texte d'origine, qui peut inspirer d'autres exercices :

"... Chaque élève d'un binôme définit une figure géométrique (par exemple constituée d'un cercle et de deux droites) dans un système de coordonnées. Pour deviner la figure de son adversaire, il tire des droites et non des points. Si à son tour de jouer, il propose ainsi la droite $y = 2x + 1$, son adversaire lui indique tous les points d'intersection de sa figure avec $y = 2x + 1$, etc. Il y a de multiples variantes suivant les figures cachées et les objets qu'on tire, la déduction et la combinatoire ne sont pas absentes de ce jeu qui peut s'organiser en tournoi comme les échecs."

La bataille navale linéaire est un jeu qui se joue à deux joueurs, dans lequel chacun doit découvrir la dimension d'un sous-espace vectoriel caché par l'autre.

Expliquons les règles en détail. On décide d'abord du champ de bataille : il s'agit d'un espace vectoriel E de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$). Chaque joueur choisit en secret un sous-espace vectoriel de E (on notera E_1 et E_2 ces deux sous-espaces). Commence alors la phase de jeu proprement dite : le premier joueur suggère un sous-espace vectoriel F de E ; le second lui répond

- "touché" si le sous-espace proposé a une intersection non triviale avec le sous-espace caché (autrement dit, si $F \cap E_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$) ;
- "dans l'eau" sinon.

C'est alors au tour du second de faire une proposition, et le jeu continue ainsi jusqu'à ce que l'un des deux joueurs trouve la **dimension** du sous-espace choisi par l'autre.

On précise que chaque joueur est libre de choisir son sous-espace secret et les sous-espaces qu'il propose de la manière qui lui convient (par exemple, à l'aide d'un système d'équations cartésiennes ou bien d'une base).

---

2. Paradoxe de Zenon

Sources et figures: `zenon/`.

Version imprimable: `zenon.pdf`

Niveau: *DEUG deuxième année.*

Objectifs et commentaires. *Zénon d'Élée prouvait l'impossibilité du mouvement par son fameux paradoxe. L'existence de séries convergentes n'est pas une évidence, et les visualiser comme inscrites dans le temps peut aider à s'en faire une représentation. L'exercice est peut-être bien adapté pour être traité en groupe (je ne l'ai pas testé).*

Question 1. Paradoxe de Zénon.

Le paradoxe suivant a été imaginé par Zénon d'Élée (490-430 Avant JC). Achille fait une course avec la tortue. Il part 100 mètres derrière la tortue, mais il va dix fois plus vite qu'elle. Quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 10 mètres. Pendant qu'Achille parcourt ces 10m, la tortue a avancé d'un mètre. Pendant qu'Achille parcourt ce mètre, la tortue a avancé de 10cm... Puisqu'on peut réitérer ce raisonnement à l'infini, Zénon conclut qu'Achille ne peut pas dépasser la tortue.

Comment peut-on dépasser ce paradoxe ?

Question 2. Une bille qui rebondit.[4]

a. Une balle part d'une certaine hauteur h_0 au dessus du sol (sans vitesse initiale). Combien de temps met elle pour arriver sur le sol (négliger les frottements) ? Quelle est son énergie cinétique lorsqu'elle arrive au niveau du sol ?

b. On modélise le rebond de la façon suivante : lorsque la balle rebondit elle perd une certaine proportion p de son énergie cinétique (par exemple $p = 10\%$). Etant partie de la hauteur h_0, A quelle hauteur h_1 va-t-elle remonter ? Quelle est la durée t_0 entre les deux premiers rebonds ?

c. Combien de fois la balle rebondit-elle ? Pendant combien de temps rebondit-elle ?

Question subsidiaire. Vous connaissez le bruit d'une bille qui rebondit, avec des rebonds de plus en plus rapprochés. Imaginez maintenant une balle qui rebondit, non plus selon le modèle ci-dessus, mais selon un autre loi. Par exemple la durée du n-ième rebond est donné par $1/n$. Que va-t-on entendre ? Voir `http://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/tex/zenon/sons` pour *écouter rebondir des séries.*

Question 3. La mouche et les trains

Deux trains partent simulanément, et à une même vitesse constante v. Le premier va de Paris à Marseille, et le second, de Marseille à Paris.

Une mouche part simultanément de Paris à vitesse $3v$ (elle suit les rails en direction de Marseille). Lorsqu'elle rencontre le train Marseille-Paris, elle fait demi-tour vers Paris. Lorsqu'elle rencontre le train Paris-Marseille, elle fait demi-tour et de dirige à nouveau vers Marseille, etc. Elle s'arrête lorsque les trains se croisent.

a. Faire un dessin dans l'espace-temps (la position en abscisse, par exemple, le temps en ordonnée)

b. Combien de fois la mouche fait elle demi-tour ?

c. Quelle est la longueur de chaque trajet ?

d. Quelle distance parcourt-t-elle en tout ?

---

3. Dessiner le crocodile : visualisation de la multiplication complexe

[4] amener une vraie bille de verre ou métallique (qui rebondit bien et de maniere sonore) en TD pour faire l'expérience !

Sources et figures: `crocodile/`.

Version imprimable: `crocodile.pdf`

Niveau: *DEUG première année.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *L'image d'un crocodile par l'application* $z \mapsto z^2$ *est un crocodile qui se mord la queue, manière visuelle percevoir la non-injectivité. Cet exercice est inspiré du début du film d'Adrien Douady sur la dynamique du lapin, où Adrien explique sans formule, graphiquement, la fonction* $z \mapsto z^2 + c$.

On peut faire placer des points de l'image du croco au fur et à mesure des questions 1 et 2.

On voudrait comprendre "quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré". Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

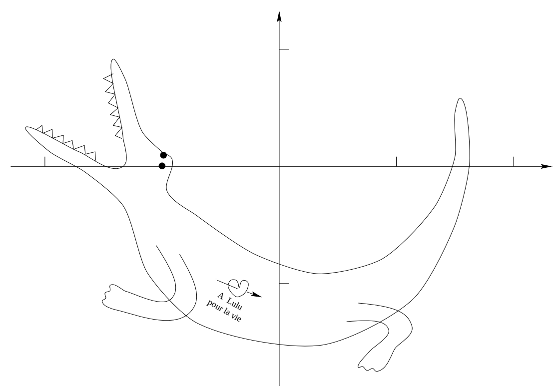


FIG. 1:

a. Ecrire les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

b. Dessiner une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

c. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placer aussi les images de quelques points particuliers du cercle.

d. "Dessiner l'image du crocodile".

e. "Comment voit-on que l'application n'est pas injective ?"

f. Dessiner l'image réciproque du crocodile (attention, il y a un piège...).

g. (plus facile) Dessiner de même l'image du croco par $z \mapsto z + 1 + 2i$, $z \mapsto (\sqrt{3} + i)z$.

---

4. Moindres carrés.

Source: `moindres_carres.tex`.

Version imprimable: `moindres_carres.pdf`

Niveau: *DEUG deuxième année.*

Objectifs et commentaires. *Faire retrouver à l'étudiant la méthode des moindres carrés sur un exemple.*

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 & = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & = 2 \end{cases}$$

a. Montrer que ce système n'a pas de solution

Ce système s'écrit aussi $A.X = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On cherche alors à trouver la meilleure solution approchée, c'est à dire X_0 tel que $||A.X_0 - b||^2$ soit minimal (où ——.—— est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$).

b. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $||A.X - b||^2$ si et seulement si $A.X_0 - b$ est orthogonal à Im A.

c. Trouver la meilleure solution approchée du système (S).

d. Pour un système $A.X = b$ quelconque, donner un système d'équations dont les solutions sont les meilleures solutions approchées du système original.

Cette méthode pour trouver une solution approchée s'appelle la méthode des moindres carrés. Elle est très utilisée en sciences expérimentales, par exemple pour trouver des coefficients d'une application affine passant le plus près possible de valeurs expérimentales.

e. Etant donnés une série de points expérimentaux (x_n, y_n), on cherche la fonction affine $y = ax + b$ qui approxime le mieux les points expérimentaux. Déterminer un système d'équations dont les solutions sont les coefficients a et b de la fonction affine cherchée.

---

5. Symétries des cristaux.

Sources et figures: `cristaux/`.

Version imprimable: `cristaux.pdf`

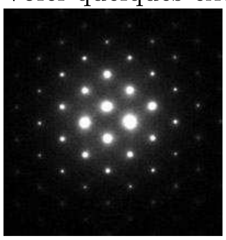
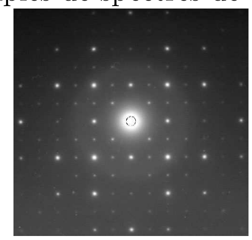
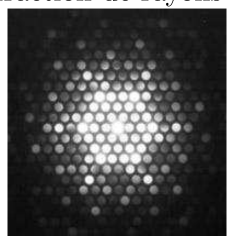
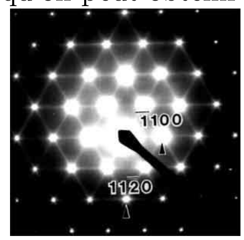
Niveau: *DEUG deuxième année.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice permet de comprendre un joli résultat de cristallographie. Il fait appel aux changements de bases (les étudiants sont souvent gênés par le fait que deux bases puissent donner le même réseau).*

Un des résultats majeurs de la cristallographie est que ¡¡ l'ordre de symétrie ¿¿ d'un cristal ne peut être égal qu'à $1, 2, 3, 4$ ou 6. Qu'est-ce que c'est que ¡¡ l'ordre de symétrie ¿¿ d'un cristal ? L'ordre d'une rotation f est le plus petit entier $n > 0$ tel que $f^n = Id$. L'ordre de symétrie d'un cristal est l'ordre maximal d'une rotation qui préserve le cristal.

L'ordre de symétrie du cristal est une donnée importante car pour étudier un cristal, on regarde le spectre de diffraction d'un faisceau de rayons X qui traverse le cristal (ce spectre ressemble en général à un ensemble de points lumineux situés sur un réseau et dont l'intensité lumineuse décroit avec la distance à l'origine, voir figures), et l'ordre de symétrie du cristal peut se lire dans l'ordre de symétrie du spectre de diffraction.

Voici quelques exemples de spectres de diffraction de rayons X qu'on peut obtenir :

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cristallographie ci-dessus pour des cristaux bidimensionnels (le résultat se démontre de la même façon pour les cristaux tridimensionels, mais il faut quelques connaissances sur les rotations de $\mathbb{R}^3$. Par contre l'ordre de symétrie peut aussi prendre les valeurs $5, 8$ et 12 en dimension 4 ou 5, et d'autres valeurs au fur et à mesure que la dimension augmente...)

On modélise un cristal bidimensionnel par l'ensemble des points de coordonnées entières (positives ou négatives) dans une certaine base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan.

a. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée. Faire des dessins des cristaux correspondant aux bases suivantes :

$$(\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

Trouver sur le dessin les rotations qui laissent invariants ces cristaux et donner l'ordre symétrie de ces cristaux.

b. Soit f une application linéaire qui préserve un cristal C. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est à coefficients entiers.

c. Sachant qu'une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe, montrer, en utilisant la trace que l'angle d'une rotation qui préserve un cristal apparaît forcément dans la liste $\theta \in \{0, \pi, \pm\pi/2, \pm 2\pi/3, \pm\pi/2, \pm\pi/3\}$. En déduire le résultat de cristallographie.

En particulier, un cristal bidimensionel ne peut pas être invariant par une rotation d'ordre 5. En dimension 4 et 5, la liste des ordres de symétries possibles s'agrandit et contient $5, 8, 12$. Dans les les années 80, on a trouvé certains matériaux ayant un ordre de symétrie égal à 5, qu'on appelle dorénavant des quasi-cristaux. Un des modèles de quasi-cristaux est la projection d'une tranche d'un *réseau* (i. e. l'ensemble des points à coordonnées entières dans une base) de dimension 4 ou plus dans l'espace de dimension 3.

---

6. Sommes de racines cinquièmes de l'unité

Source: `sommes_de_racines.tex`.

Version imprimable: `sommes_de_racines.pdf`

Niveau: *DEUG première année.*

Objectifs et commentaires. *Expérimenter, visualiser des sommes de nombres complexes, utiliser les propriétés du groupe des racines de l'unité (somme nulle, invariance par rotation).*

On considère l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité. On en choisit certaines (entre une et cinq !), on fait leur somme, et on prend le module de cette somme.

Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir de cette manière ?

Autrement dit, si U_5 désigne l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité, la question consiste à calculer le nombre suivant :

$$\mathrm{Max}\left\{\left|\sum_{w\in E} w\right| \text{ avec } E\subset U_5\right\}.$$

Suggestions

- Rassemblez vos connaissances sur les racines $n$ièmes de l'unité ;
- expérimentez : représentez quelques-unes des sommes impliquées dans le problème ; pouvez-vous les calculer ? Faites une conjecture, prouvez la conjecture !

Généralisation Généralisez l'énoncé précédent. Essayez de deviner la réponse au problème généralisé. Prouvez votre conjecture...

---

7. Introduction à l'algèbre linéaire : les carrés magiques d'ordre 3

Source: `carres-magiques.tex`.

Version imprimable: `carres-magiques.pdf`

Niveau: *DEUG première année.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice est destiné à être posé au tout début du cours d'algèbre linéaire, voire avant le cours. On tente d'introduire "naturellement" certaines des notions-clés, comme la définition d'espaces vectoriels, les bases (et l'existence de bases distinctes), la notion de somme directe, les applications linéaires... Remarquons que l'espace vectoriel des carrés magiques a un avantage (pédagogique) sur les espaces $\mathbb{R}^n$ ou sur l'espace des polynômes : il n'a pas de base canonique.*

Cet exercice est fortement inspiré d'un devoir donné à l'université de Lille, que l'on trouve dans l'annexe 7 du texte de Marc Rogalski, Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *(cahier de DIDIREM 11, octobre 91). On lira d'ailleurs avec profit ce texte d'une trentaine de pages qui présente un enseignement pensé dans sa globalité ("ingénieurie longue"), ce qui n'empèche pas d'en extraire des petits morceaux...*

Il s'agit d'une activité de découverte de nouvelles notions, et il est difficile de rédiger un sujet sans interventions d'un professeur... On a donc signalé par le symbole (*) tous les endroits qui nécessite quelques commentaires. Voici des commentaires sur ces commentaires, dans l'ordre d'apparition du texte :

1. *On espère que les étudiants auront trouvé les carrés magiques constants, et au moins un autre (on peut éventuellement faire intéragir tous les groupes d'étudiants pour cela). Introduire ici la notion de somme, de produit extérieur (d'autres idées peuvent apparaitre, à l'aide de symétries par exemple : elles pourraient déboucher sur l'idée d'application linéaire, mais il vaut sans doute mieux les laisser tomber pour le moment...). Remarquer que l'on définit des nouvelles opérations (très simples), sur l'ensemble des carrés magiques E. Introduire le terme* espace vectoriel, *si le cours correspondant n'a pas déjà été fait. On peut aussi parler de* combinaison linéaire. *Faire remarquer que l'on n'est pas sûr d'avoir trouvé tous les carrés magiques...*
2. *La question n'est pas très facile à faire comprendre, et il faudra peut-être la reformuler ; on espère trouver des schémas du type*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & c \\ ? & e & ? \\ ? & ? & ? \end{array}}$$

   ou bien

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & ? \\ ? & e & ? \\ ? & ? & i \end{array}}$$

3. *Simple vérification des résultats.*
4. *Idem.*

Quand vous rencontrez le symbole (*), appelez le professeur et expliquez-lui vos résultats.

I. Définition, objectifs

Dans cet exercice, on appellera *carré magique* un tableau carré contenant 9 nombres réels, tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soient égales :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} \end{array}}$$

avec

$$\begin{array}{ccc} a+b+c=S & a+d+g=S & a+e+i=S \\ d+e+f=S & \dots & c+e+g=S \\ g+h+i=S & \dots & \end{array}$$

où le nombre S s'appelle *la somme* du carré. [5]

[5] Les amateurs de casse-tête rajoutent d'autres types de conditions, ce qui change radicalement la nature du problème (et le rend bien plus difficile).

Le but de l'exercice est de trouver *tous* les carrés magiques.

Sur le plan pédagogique, l'exercice est en quelque sorte un prétexte pour introduire dans ce cadre certaines des notions-clés de l'algèbre linéaire : *espaces vectoriels, bases, dimension, sommes directes, applications linéaires.* [6] Notamment, on n'essaiera pas de résoudre le problème de la manière la plus simple ou la plus courte, on tentera plutôt de bien comprendre les propriétés des objets étudiés.

Plus précisément, voici une stratégie possible : le problème revient à résoudre un système de 8 équations linéaires à 10 inconnues, et on a des méthodes pour faire ça. Mais ça n'est pas très agréable : avec un peu d'astuce et de réflexion, on va essayer de diminuer le nombre de calculs.

II. Fabrication de quelques carrés magiques

Question 1. Premiers exemples

Trouvez des exemples de carrés magiques les plus simples possibles. Essayez d'obtenir deux exemples “les plus différents possibles”.

Question 2. Machines à fabriquer de nouveaux exemples

Comment peut-on obtenir de nouveaux exemples à partir de carrés magiques connus ? Essayez de trouver le plus possible de tels procédés.

(*)

III. Une réduction du problème

Question 1. Décomposition

Montrer que tout carré magique peut se décomposer comme somme d'un carré magique constant et d'un carré magique de somme nulle.

Question 2. Unicité

Montrer que cette décomposition est unique.

Question 3.

Vérifiez que ces deux sous-ensembles de carrés magiques sont aussi des espaces vectoriels (on dit que ce sont des *sous-espaces vectoriels* de l'espace vectoriel E des carrés magiques).

On traduit les propriétés de cette partie en disant que *l'espace vectoriel des carrés magiques est la somme directe du sous-espace formé des carrés de somme nulle et du sous-espace formé des carrés constants.*

En quoi ceci permet-il de simplifier le problème ? Formuler cette simplification le plus précisément possible.

IV. Résolution

On va chercher maintenant à déterminer tous les carrés magiques de somme nulle (répétons-le, en évitant de résoudre un “gros” système d'équations).

[6] Les notions introduites ici de manière un peu floue seront précisées en cours.

Question 1.

En pratique, quand on essaie de construire un carré magique (de somme nulle), on commence par remplir quelques cases par des valeurs arbitraires (il y a bien sûr énormément de choix possibles), puis, au bout d'un moment, on n'a plus du tout le choix : la suite du remplissage du carré est entièrement déterminée par les valeurs choisies dans les premières cases. Donnez un ou plusieurs exemples de remplissages de quelques cases du carré qui forcent ainsi toute la suite du remplissage du carré.

(*)

Question 2.

Choisir l'un des schémas trouvés à la question précédente, et compléter dans le carré les cases restantes en fonction des cases présélectionnées. Obtient-on toujours ainsi un carré magique de somme nulle ? Sinon, que faut-il rajouter ?

Question 3.

À partir de la question précédente, exprimer tous les carrés magiques de somme nulle à partir de quelques carrés particuliers.

En déduire l'ensemble de tous les carrés magiques, sous la même forme.

(*)

V. Encore quelques notions d'algèbre linéaires

Question 1. Bases et dimension

a. Combien faut-il de coefficients, au minimum, pour exprimer l'ensemble des carrés magiques ?

Ce "nombre minimum de paramètres à utiliser pour décrire un espace vectoriel" s'appelle la *dimension* de l'espace vectoriel. Donner de même la dimension du sous-espace vectoriel des carrés magiques constants, puis celle des carrés magiques de somme nulle.

b. Les carrés magiques particuliers utilisés à la question 3 pour décrire l'ensemble de tous les éléments de l'espace vectoriel forment *une base* de l'espace vectoriel (à condition toutefois qu'on en ait pris le moins possible).

Quel lien y a-t-il entre une base et la dimension ?

Un espace vectoriel peut-il avoir plusieurs bases différentes ?

Voyez-vous des liens entre la somme directe et les bases ?

(*)

VI. En guise de conclusion

A quoi sert l'algèbre linéaire ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau DEUG : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on va utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire, la plupart du temps en resolvant un système d'équations ; et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués, très abstraits : donc, l'utilité en tant qu'*outil* n'est pas très claire (en DEUG en tout cas !)

On peut quand même faire sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'*unifier* des problèmes et des situations a priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche s'appelle *la méthode axiomatique*, et est fondamentale dans les mathématiques récentes.

Plus précisément, on commence par remarquer que l'on sait additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou deux fonctions, ou deux polynômes, ou deux suites de réels (comment ?...), ou deux carrés magiques ; et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels.

Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des cinq cadres cités. Par exemple, les notions de droite, de plan, de repère (on dira *base*), que l'on connait déjà dans $\mathbb{R}^3$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! La propriété qui dit que "dans $\mathbb{R}^3$, deux plans ont toujours une droite en commun" deviendra ainsi "dans tout espace vectoriel de dimension 3, deux sous-espaces vectoriel de dimension 2 ont toujours un sous-espaces de dimension 1 en commun" et sera vraie quelle que soit la nature des éléments de l'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites, carrés magiques ou autres ; et on pourra d'ailleurs la généraliser à des dimensions supérieures).

Ce point de vue donne également un support géométrique, et permet de visualiser les objets : dans l'exercice, l'ensemble des carrés magiques s'avère être un espace vectoriel de dimension 3, ce qui permettra d'y faire exactement les mêmes opérations et les même raisonnements que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, que l'on "voit" beaucoup mieux que l'espace des carrés magiques.

Même si le DEUG n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique...

---

8. Des dés ronds

Source: `de_rond.tex`.

Version imprimable: `de_rond.pdf`

Niveau: *DEUG deuxième année.*

Objectifs et commentaires. *Dans cet exercice, on donne une motivation inhabituelle pour calculer des aires de surfaces courbes : la probabilité pour qu'un point marqué sur un dé rond arrive à telle ou telle hauteur. Il n'est pas intuitif qu'on obtienne une probabilité uniforme (sur l'intervalle $[0, 2R]$) dans le cas d'un dé sphérique. Une des difficultés sera sans doute de modéliser le tirage du dé sphérique car l'espace des positions d'une sphère est compliqué (c'est SO_3), même si l'ensemble des positions d'un point sur cette sphère est paramétré par la sphère.*

Cet exercice vient d'une question question que m'avait posé un ami physico-chimiste. Il voulait comprendre la probabilité que le point marqué soit à telle ou telle hauteur, pour modéliser le mouvement d'une protéine à la surface d'une électrode si je me rappelle bien...

On vous propose un jeu de dés un peu spécial. Le dé est une boule de 10cm de diamètre sur laquelle un point rouge est marqué. On lance le dé sur une table (horizontale) et on attend qu'il s'arrête. Le résultat du lancer est la hauteur en centimètres entre le point rouge et la table. Ainsi, le dé prend ses valeurs entre 0 et 10. Vous misez puis vous devez choisir l'une des options suivantes :

– Pari bas : vous pariez que le résultat du dé sera compris entre 0 et 3. Si vous avez raison, vous gagnez 4 fois la mise (c'est à dire, vous reprenez votre mise, plus 3 fois son montant). Sinon, vous perdez la mise.
– Paris haut : vous pariez que le résultat du dé sera compris entre 3 et 10. Si vous avez raison, vous gagnez 1.33 fois la mise (c'est à dire, vous reprenez votre mise, plus le tiers de son montant). Sinon, vous perdez la mise.

Quelle option choisissez-vous ?

SUGGESTION : il est peut-être plus facile, pour commencer, de traiter le cas d'un dé cylindrique…