Ordonner les nombres complexes

Source: ordre_complexe.tex.

Version imprimable: ordre_complexe.pdf

Théorie des ensembles, et structures de base. DEUG première année. Angle pédagogique : *Méta-mathématiques.*

Objectifs et commentaires. *Il s'agit ici de faire comprendre aux étudiants pourquoi* on n'a pas le droit *de comparer deux nombres complexes. Il faut sans doute s'attendre à ce que certains pensent qu'il n'existe pas d'ordre total sur* $\mathbb{C}$ *du tout.*

Considérons un ordre total $\prec$ sur $\mathbb{C}$. Disons qu'un tel ordre est *raisonnable* si on a les deux propriétés suivantes :

- si $a \prec b$, alors $a + c \prec b + c$
- si $a \prec b$ et $c \succ 0$, alors $ac \prec bc$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il n'existe pas d'ordre raisonnable sur $\mathbb{C}$.

a. Existe-t-il un ordre total sur $\mathbb{C}$?
Supposons maintenant que $\prec$ soit un ordre raisonnable. On veut aboutir à une contradiction.

b. Démontrer que si $x \succ 0$, alors $-x \prec 0$.

c. Démontrer que si $x \succ 0$ alors $x^2 \succ 0$.

d. Démontrer que si $x \prec 0$ alors $x^2 \succ 0$.

e. Déduire des questions précédentes que $1 \succ 0$, et en déduire à la fois que $-1 \prec 0$, et $-1 \succ 0$, ce qui est impossible.