Introduction aux courbes paramétrées du plan

Source: `courbes-parametrees.tex`.

Version imprimable: `courbes-parametrees.pdf`

Géométrie différentielle. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Découverte.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Cet exercice propose une introduction aux propriétés géométriques des courbes paramétrées du plan. On suppose ici que les étudiants n'ont eu aucun cours sur le sujet.*

En général, un cours de maths commence par la donnée des définitions des objets que l'on va étudier. Cette manière de faire est évidemment très économique, mais elle est aussi dangereuse, parce que d'un point de vue historique, ces définitions sont en général l'aboutissement d'un long processus de pensée (et certainement pas son commencement).

Pour que les étudiants aient une chance de comprendre le rôle des définitions, il faut, de temps en temps, prendre le temps d'inverser le procédé, en les laissant découvrir le plus possible par eux-même quelques définitions.

Les notions de vitesse, longueur, accélération me semblent particulièrement propices à ce travail, puisqu'il s'agit de notions directement issues du monde physique, sur lesquelles chacun a une idée intuitive.

De plus, il y a un véritable raisonnement *pour aboutir à la définition de la longueur d'une courbe. Bien sûr, il ne s'agit pas d'un raisonnement dans le langage habituel des maths (celui-ci ne peut arriver qu'après que les objets aient été formalisés), mais il s'agit bien d'un type de raisonnement qui fait partie de l'activité mathématique au sens large. Le manque d'habitude de ce type de démarche est d'ailleurs l'une des difficultés rencontrées par les étudiants :*

"M'sieur, comment on peut justifier mathématiquement *que c'est ça la définition ? ?"*

La réponse est qu'on ne peut pas. Par contre, on peut le justifier empiriquement, et aussi en confrontant la version mathématique de la longueur à sa version intuitive, en vérifiant qu'on a bien les propriétés attendues (questions 2.b et 2.c).

Bien sûr, "inventer" la définition de la longueur n'est pas un exercice facile, la résolution de la question 2 peut prendre une heure...

On modélise généralement la trajectoire d'un mobile par la notion de *courbe paramétrée* : il s'agit simplement d'une application (continue...) d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ("le temps") dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est de définir mathématiquement certaines notions géométriques associées (vitesse, longueur, courbure), et de vérifier que les définitions formelles se comportent de manière conforme à l'intuition.

Question 1. Vitesse

Soit I un intervalle et $c : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan. On note, pour tout t dans I, $c(t) = (x(t), y(t))$. Comment définiriez-vous la *vitesse* du mobile au temps t ?

Question 2. Longueur

a. Comment définiriez-vous la *longueur* de la trajectoire du mobile ?

b. Testez votre définition en calculant la longueur d'un segment, d'un cercle de rayon r. Montrez en particulier que la longueur du segment ne dépend pas de la vitesse à laquelle on le parcourt (et qu'on trouve bien la même longueur, même si on le parcourt à une vitesse qui n'est pas constante).

c. (optionnel) Le plus court chemin d'un point à un autre... Montrer formellement que toute courbe paramétrée, dans le plan, reliant un point A à un point B, est plus longue que le segment $[AB]$.

Aides : pour simplifier, on peut supposer que $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$. Comparez la longueur d'une courbe c à celle de la courbe c_0 obtenue en projetant c orthogonalement sur l'axe des x.

d. (optionnel) Longueur d'une portion de graphe Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction ; trouvez la formule donnant la longueur du graphe de f. Vérifiez la formule pour un arc de cercle.

Question 3. Accélération

a. Comment définiriez-vous l'*accélération* du mobile au temps t ?

b. Montrer le résultat suivant : si le mobile se déplace à vitesse constante, alors le vecteur accélération est perpendiculaire à la courbe.

Question 4. Courbure

Soit c une courbe paramétrée, de vitesse constante égale à 1. On définit la *courbure* comme la longueur du vecteur accélération.

(Pour une courbe dont la vitesse n'est pas constante, on commence par reparamétriser la courbe pour avoir une vitesse constante).

a. Calculer la courbure d'un segment, puis d'un cercle de rayon r. Intuitivement, quel lien y a-t-il entre la courbure et l'aspect de la courbe en un point ?

b. On voudrait montrer qu'en un point $c(t_0)$ où la courbure n'est pas nulle, “la courbe est vraiment courbe”, au sens suivant : *pour tous temps t_1 et t_2 assez proches de t_0, les points $c(t_0)$, $c(t_1)$, $c(t_2)$ ne sont pas alignés.*

Aides : On peut simplifier le problème en faisant un changement de variable adapté (= en choisissant un bon repère). Trouver un équivalent (quand t tend vers t_0) de la pente de la droite reliant un point $c(t)$ au point $c(t_0)$.

Autre interprétation géométrique Voyons une autre manière d'interpréter géométriquement la courbure.

Commençons par nous souvenir de la tangente. Soit c une courbe paramétrée (parcourue à vitesse constante), $c(t_0)$ un point de la courbe. Notons $\vec{v}(t_0)$ le vecteur vitesse au point t_0 ; la tangente au point $c(t_0)$ est la droite passant par ce point et dirigée par le vecteur $\vec{v}(t_0)$. On peut montrer que c'est aussi la droite "qui approxime le mieux la courbe au point $c(t_0)$" : plus précisément, c'est la seule droite du plan qui possède un paramétrage $t \mapsto d(t)$ tel que

$$d(d(t), c(t)) = o(t).$$

(la distance entre la droite et la courbe est négligeable devant t).

Revenons maintenant à la courbure. Supposons que la courbure n'est pas nulle, et notons $R(t_0)$ son inverse, qu'on appelle le *rayon de courbure*. Soit $\mathcal{C}_{t_0}$ l'unique cercle tangent à la courbe c au point $c(t_0)$, et de rayon $R(t_0)$; on l'appelle *cercle osculateur*. On peut alors montrer que ce cercle est le cercle qui "approxime le mieux la courbe au point $c(t_0)$ parmi tous les cercles tangents à la courbe en $c(t_0)$" : c'est le seul cercle du plan qui possède un paramétrage $t \mapsto \mathcal{C}(t)$ tel que

$$d(\mathcal{C}(t), c(t)) = o(t^2).$$

On dit aussi que ce cercle est "tangent à la courbe c à l'ordre 2".
