Changement de l'ordre des termes d'une série

Source: `convergence-commutative.tex`.

Version imprimable: `convergence-commutative.pdf`

Séries. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Expérimental.*

Objectifs et commentaires. *Sensibiliser les élèves au délicat problème de la permutation des termes d'une série semi-convergente. Au passage, on utilise une version simple du "regroupement par paquets", et une comparaison série-intégrale.*

Les séries non-commutatives sont sans doute un sujet trop abstrait pour être abordé directement par les étudiants de DEUG ; c'est pourquoi nous leur proposons une phase expérimentale sous MAPLE (partie I). Dans un deuxième temps (partie II), on leur demande de démontrer ce qu'il ont observé en prenant garde à rester dans un cadre suffisamment concret. Dans la partie III, on traite d'abord le cas des séries à termes positifs. Maintenant qu'on a fait remarquer aux étudiants qu'il peut arriver des choses bizarres quand on permutte l'ordre des termes de certaines séries, on peut essayer d'obtenir d'eux une preuve de la convergence commutative dans le cas positif (alors que sans les parties précédentes, on peut parier que la question paraîtrait sans intérêt aux étudiants : ¡¡ évidemment, ça change rien, l'addition est commutative...¿¿. On revient ensuite à la série harmonique alternée, pour essayer de faire sentir aux étudiants la possibilité d'atteindre n'importe quelle valeur en changeant l'ordre des termes. Enfin, l'appendice exploite la non-commutativité pour obtenir un calcul de cette série (sans les séries entières).

L'exercice est assez long et peut être traité partiellement (par exemple, les parties I et II peuvent être traitées en TP sur logiciel de calcul, puis la partie III en TD, ou en ateliers en travail en groupe) ; mais nous recommandons de conserver l'ordre proposé (et surtout de ne pas proposer la partie III sans la partie I).

Remarque : *la question 1 de la partie III est volontairement vague, les étudiants ressentiront peut-être le besoin de formaliser ce que signifie "changer l'ordre des termes". On peut les aider en* *leur suggérant de penser aux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$: ici, que doit vérifier l'application φ ?...*

Les questions qui nécessitent une preuve et qui n'utilisent pas MAPLE sont notées (♣). Il est conseillé d'utiliser MAPLE au maximum dans les calculs. Les questions sont logiquement indépendantes.

I. Expérimentation

Question 1.

Notre série semi-convergente préférée est la série harmonique alternée de terme général

$$u_n = -\frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{avec } n \geq 1.$$

Ses termes sont successivement positifs et négatifs :

$$\sum u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Vérifier (à l'aide de MAPLE) qu'elle est semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente). Quelle est sa somme ?

Question 2.

Nous construisons une nouvelle série $\sum v_n$ à partir de $\sum u_n$ en modifiant l'ordre d'apparition de ses termes : cette fois, un terme positif sera suivi de *deux* termes négatifs. La série $\sum v_n$ s'écrit donc :

$$\sum v_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Calculer les sommes partielles de $\sum v_n$ d'ordre 30, 90, 300 et les comparer à la somme de $\sum u_n$.

II. Première démonstration

Alors que nous avons simplement modifié l'ordre des termes, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ semblent avoir des sommes différentes !

La question 1 démontre ce "paradoxe" en supposant que la série $\sum v_n$ converge. La question 2 prouve cette convergence. (Les questions sont indépendantes.)

Question 1. Les séries ont des sommes différentes

a. (♣) Écrire la forme du terme général v_n. (On pourra distinguer pour $m \geq 1$, les termes v_{3m-2}, v_{3m-1} et v_{3m}.)

b. Nous notons U_n et V_n les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Montrer que la suite $(U_{2l})_{l \geq 1}$ est strictement croissante, et que la suite $(V_{3m+1})_{m \geq 1}$ est strictement décroissante. Trouver des entiers l et m plus grands que 1 tels que $U_{2l} \geq V_{3m+1}$.

c. (♣) En admettant que $\sum v_n$ converge, conclure que la somme de la série $\sum u_n$ est strictement supérieure à la somme de sa série modifiée $\sum v_n$.

Question 2. Preuve de la convergence

Nous voulons montrer que $\sum v_n$ converge et faire calculer par MAPLE la somme exacte de $\sum v_n$. Nous aurons besoin du "*principe de regroupement par paquets*" :

Proposition : Principe de regroupement par paquets.

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série dont le terme général a_n tend vers 0. Nous définissons une nouvelle série $\sum_{m\geq 1} b_m$ en regroupant les termes par paquets de trois :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ b_2 &= a_4 + a_5 + a_6, \\ &\dots \\ b_m &= a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Alors, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_m$ sont de même nature (convergentes ou divergentes). Si elles convergent, leurs sommes sont égales.

Ainsi pour étudier la convergence de $\sum v_n$ il est plus simple de grouper les termes par paquets de trois et d'introduire la série $\sum w_m$:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 + v_3, \\ w_2 &= v_4 + v_5 + v_6, \\ &\dots \\ w_m &= v_{3m-2} + v_{3m-1} + v_{3m}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Calculer explicitement le terme général w_m. En déduire que la série $\sum v_n$ converge (utiliser le regroupement par paquets). Demander à MAPLE sa somme, et comparer à $\sum u_n$.

III. Démonstration sur papier (♣)

Dans les deux premières parties, on a constaté expérimentalement que changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pouvait modifier la valeur de la somme, puis on a donné une preuve de ce résultat. On propose maintenant d'explorer d'autres aspects du changement d'ordre des termes d'une série.

Question 1. Cas des séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et $\sum v_n$ une série obtenue à partir de la précédente en changeant l'ordre des termes.

a. Si $\sum u_n$ converge, est-ce que $\sum v_n$ converge nécessairement ?

b. Si les deux séries convergent, ont-elles la même somme ?

Question 2. Changement d'ordre qui fait diverger la série harmonique alternée

a. Montrer qu'il est possible de changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pour obtenir une série divergente ! (**Aide :** la série à termes positifs $\sum u_{2n+1}$ est divergente).

b. Montrer qu'il est possible de changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pour obtenir une série dont la somme vaut 100 (ou bien tout autre nombre qui vous plaira).

Question 3. Pour aller plus loin...

Proposer une conjecture qui généraliserait à d'autres séries les résultats obtenus sur la série harmonique alternée. Prouver la conjecture.

IV. Appendice : un calcul de la somme de la série harmonique alternée

Nous souhaitons retrouver maintenant les sommes S et S' que donne MAPLE pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Question 1. Une première relation entre S et S'

On regroupe les termes de $\sum u_n$ par paquets de deux en définissant la série $\sum t_m$ de terme général

$$t_m = u_{2m-1} + u_{2m}, \quad \text{avec } m \geq 1.$$

Calculer t_m et trouver une relation simple entre t_m et w_m (miracle !). En déduire une relation simple entre les sommes S et S'.

Question 2. Une seconde relation (♣)

Indépendamment de la question précédente, montrer que pour $m \geq 1$,

$$V_{3m} = U_{2m} + \sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}.$$

Pour étudier ensuite $\sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}$, comparer u_n à une intégrale et prouver,

$$\int_m^{2m} \frac{1}{2x} dx \geq \sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k} \geq \int_{m+1}^{2m+1} \frac{1}{2x} dx.$$

En déduire la limite de $\sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}$ lorsque m tend vers $+\infty$ puis une nouvelle relation entre les sommes S et S'.

Question 3. Conclusion (♣)

Conclure en donnant les valeurs de S et S'.

Question 4. Question subsidiaire (♣)

Prouver le “principe de regroupement par paquets”.