Introduction à la topologie : la caractéristique d'Euler-Poincaré

Sources et figures: Euler-Poincare/.

Version imprimable: Euler-Poincare.pdf

Topologie. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Expérimental.*

Objectifs et commentaires. *La topologie est, parmi les matières enseignées en DEUG, l'une de celles où la démarche scolaire est la plus éloignée de l'intuition. Paradoxalement, c'est aussi l'une des branches des maths les plus vulgarisées. On essaie ici de faire en sorte que "les deux bouts se rejoignent" : à l'issue d'une exploration informelle dont le but est d'amener les étudier à "penser topologiquement", on introduit formellement la notion d'homéomorphisme, qui est l'un des concepts centraux de la topologie. C'est aussi un prétexte pour faire découvrir la caractéristique d'Euler-Poincaré, et un très beau résultat mathématique, sans attendre un cours d'homologie en DEA !*

Notons que ***la partie II ne doit pas être lue avant d'avoir résolu la partie I****, puisqu'elle contient la formule d'Euler que l'étudiant doit découvrir dans la partie I.*

Ce texte s'inspire par endroits du texte Geometry and the imagination.

Introduction

La topologie est à la fois une branche des mathématiques (où la recherche est encore très active), et une "boite à outils" utilisée dans toutes les autres branches des maths. Si l'on veut définir les concepts topologiques formellement, on s'appuie sur la théorie des ensembles ; après un chemin assez long (allant du DEUG à la Maîtrise), on arrive à définir et à étudier mathématiquement des objets comme les surfaces et leur généralisation en dimensions supérieures.

Ici, on va faire le choix inverse : pour une fois, nous allons raisonner sur des *objets non formalisés*, c'est-à-dire sans donner de définition précise, en se contenant d'idées intuitives. L'inconvénient est que ce flou sur les définitions se retrouve dans les démonstrations : on aura un peu moins de certitude que d'habitude sur les résultats obtenus. L'avantage est qu'on n'est pas obligé d'attendre la Maîtrise de maths pour étudier les surfaces...

A la fin, on essaiera de faire le lien entre les objets informels vus ici et le point de vue formel des cours de maths habituels.

I. Polyèdres et polygônes

Question 1. Comptabilité

Comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pour les polyèdres des figures 1, 2, 3 et 4. Remplissez le tableau suivant.

	n^0 1	n^0 2	n^0 3	n^0 4	n^0 5	n^0 6	n^0 7
sommets							
arêtes							
faces							

Question 2. La relation d'Euler

Le mathématicien Euler a trouvé une formule très simple reliant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces, et *valable dans tous les polyèdres*. A l'aide des exemples de la question précédente, pouvez-vous retrouver cette relation ?

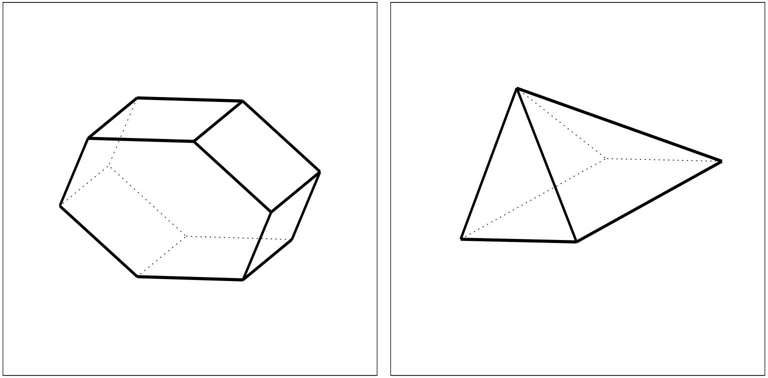

FIG. 1: Exemples de polyèdres (1)

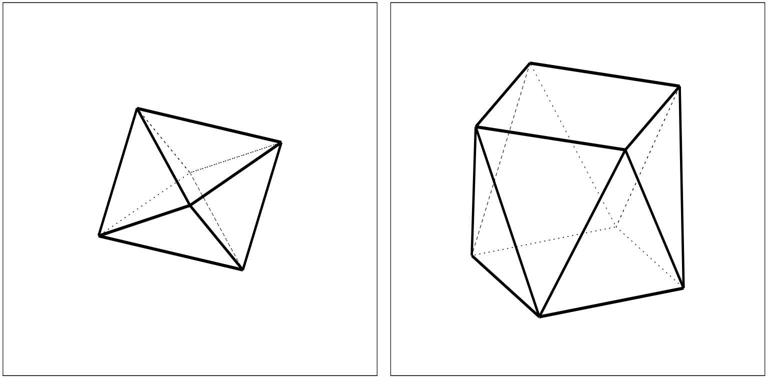

FIG. 2: Exemples de polyèdres (2)

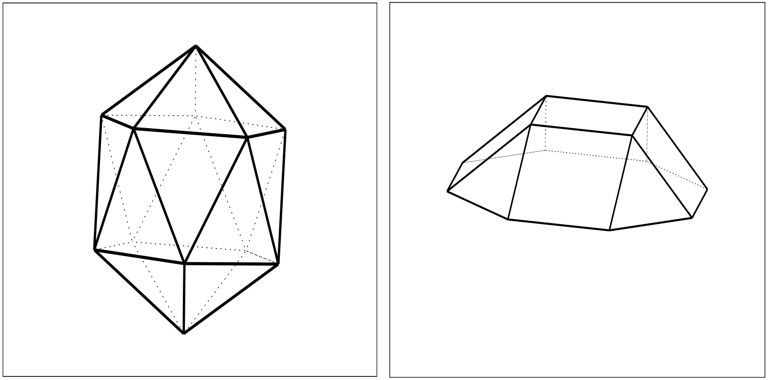

Fig. 3: Exemples de polyèdres (3)

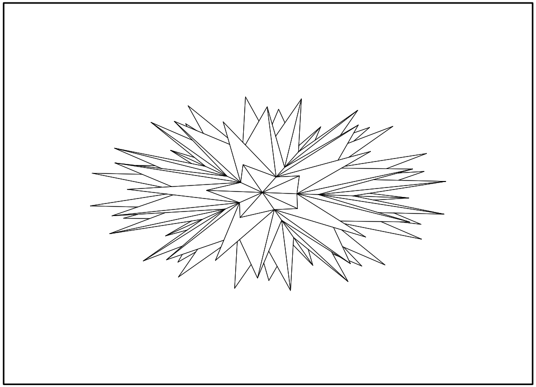

Fig. 4: Et un dernier polyhèdre ? ?...

Question 3. Cas des polygônes du plan

Dessinez un polygône (triangle, carré, *etc.*), et découpez-le en un certain nombre de polygônes plus petits. Ici encore, comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de petits polygônes. Quel relation y a-t-il entre ces trois nombres ? Essayez d'autres exemples.

Question 4. Preuves informelles

Pouvez-vous justifier cette dernière relation par un raisonnement ?
Pouvez-vous justifier la formule d'Euler ?
Énoncez les deux résultats prouvés dans un théorème.

II. Les surfaces, objets topologiques

Dorénavant, on notera toujours S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. On a donc obtenu les résultats suivants :

Théorème *(polyèdres) Pour tout polyèdre, le nombre $S - A + F$ vaut* 2.

Théorème *(découpages des polygônes) Pour tout découpage d'un polygône du plan, le nombre $S-A+F$ vaut* 1.

Ces deux théorèmes concernent les polyèdres et les polygônes, qui sont des objets géométriques. Nous allons maintenant examiner ces théorèmes sous l'angle de la topologie.

Sur la plan intuitif, on peut dire que la topologie est une géométrie "molle", qui aurait oublié comment évaluer les notions géométriques de distance et d'angle ; c'est la théorie mathématique où l'on s'autorise à étirer, comprimer, tordre une forme, mais sans la déchirer ou la coller, et sans l'écraser. Quand on peut passer d'une forme à une autre par ce type de déformations, on dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes*. Ainsi, un carré est topologiquement équivalent à un cercle, puisqu'on

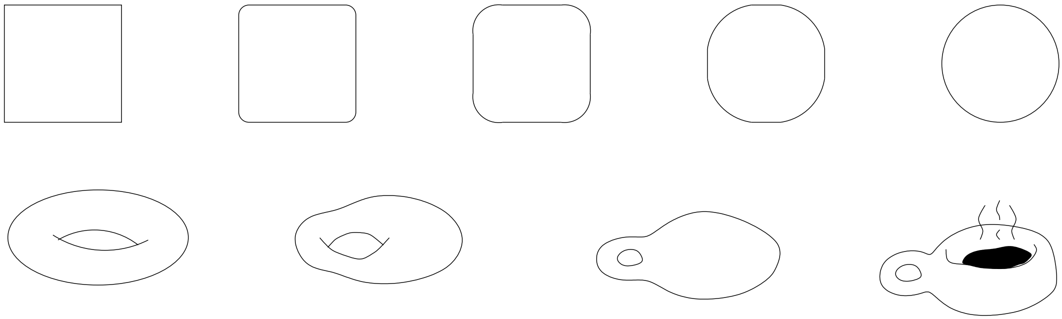

FIG. 5: Un carré se déformant en cercle, et un tore se changeant en tasse à café

peut déformer continûment un carré en un cercle (voir figure 5). Un autre exemple est donné par la surface d'un tore (comme les bouées en caoutchouc) et celle d'une tasse à café (avec une anse).[1]

Question 1. Les lettres

Comme premier exercice de topologie informelle, regardons les lettres de l'alphabet (en capitales, et sans enluminures) comme des dessins dans le plan. Parmi ces lettres, lesquelles sont topologiquement équivalentes, lesquelles sont topologiquement différentes ? Combien y a-t-il de lettres dans l'alphabet d'un topologue ?

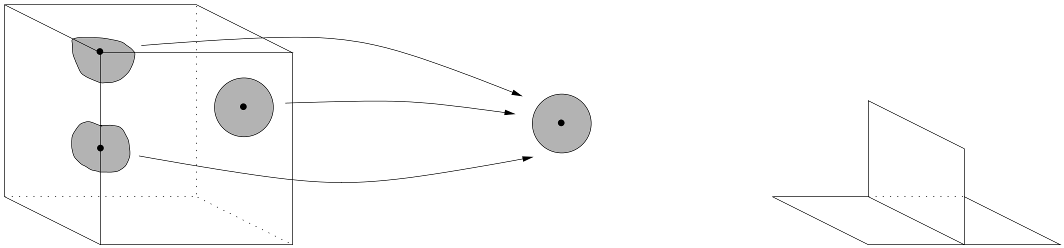

FIG. 6: Un cube, et trois petits morceaux que l'on peut déformer en un disque. Par contre, le dessin de droite n'est pas topologiquement équivalent à un disque.

Question 2. Construction de quelques surfaces

Une *surface*[2] est une forme dont *tous les morceaux assez petits sont topologiquement équivalents à un petit disque du plan*. Par exemple, la surface d'un cube est une surface, qui est topologiquement équivalente à la surface d'une sphère[3]. Par contre, si vous rajoutez un mur dans le cube (vous changez le studio en un deux-pièces !), la réunion des murs n'est plus une surface, parce qu'il y a des points en lesquels trois cloisons se rencontrent, et que cette forme n'est pas topologiquement équivalente à un disque du plan. Ceci est illustré sur la figure 6.

a. (question optionnelle) Citez des surfaces topologiquement équivalentes à la sphère. Citez des surfaces qui ne sont pas topologiquement équivalentes à la sphère. Combien de sortes topologiques de surfaces connaissez-vous ?

---

[1] On peut bien sur définir de manière précise (en termes de théorie des ensembles) l'équivalence topologique (voir la fin du texte) ; mais nous allons nous contenter de raisonner avec cette définition intuitive.

[2] En termes savants, on dit aussi *variété de dimension 2.*

[3] Attention à ne pas confondre la *surface* de la sphère avec le volume qu'elle renferme (ce volume est une variété de dimension 3, ce n'est bien sûr pas une surface).

b. Papier et ciseaux Découpez des bandes de papier, et recollez les extrémités de différentes manières : sans demi-tour (on obtient un *anneau*) ; avec un demi-tour (on obtient un *ruban de Möbius*) ; avec deux demi-tours ; avec trois demi-tours.

c. Découpez chacune des surfaces selon le milieu de la bande d'origine (le méridien). Que se passe-t-il ?

III. Triangulations des surfaces, et caractéristique d'Euler-Poincaré

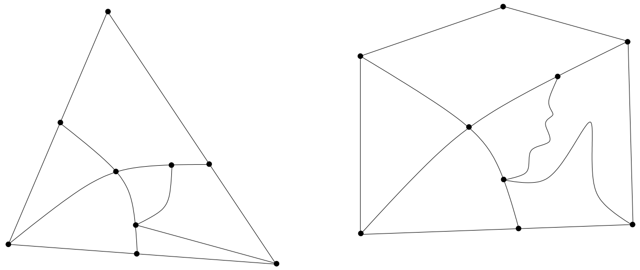

Fig. 7: Deux triangulations topologiquement équivalentes

Une *triangulation* d'un polygône du plan est un dessin comme ceux de la figure 7, constitué d'un certain nombre de *sommets* et d'*arêtes* (éventuellement courbées) reliant les sommets, de manière à ce que si vous découpez selon les arêtes, le plan se retrouve décomposé en “polygônes tordus”, c'est-à-dire en morceaux topologiquement équivalent à des polygônes[4]. Ces polygônes topologiques sont appelés *faces* de la triangulation.[5]

[4]Sauf la partie non bornée.

[5]On devrait peut-être dire *polygonulation* plutôt que triangulation...

Ainsi, les découpages de polygônes (question 3 de la partie précédente) étaient des cas particuliers de triangulations du plan (avec des arêtes non courbées).

Deux triangulations sont considérées comme identiques si on peut passer de l'une à l'autre en déformant continûment le plan. Ainsi, les deux triangulations de la figure 7 sont considérées comme étant les mêmes.

On définit de la même manière une triangulation sur la sphère, ou sur une autre surface. Chacun des polyèdres de la première partie définit une triangulation de la sphère, voyez-vous pourquoi ?

Faisons la remarque suivante : *les raisonnements à la fin de la première partie n'utilisaient pas le fait que les arêtes des triangulations n'étaient pas courbées. Par conséquent, le théorème sur les découpages de polygônes se généralise aux triangulations du plan :*

Théorème *(triangulation des polygônes) Pour toute triangulation d'un polygône du plan, le nombre $S - A + F$ vaut* 1*.*

Question 1.

Le but de cette question est de savoir ce que deviennent les résultats de la première partie (concernant le nombre $S - A + F$ pour les polyèdres et les polygônes du plan) pour les autres surfaces.

Pour quelques-unes des surfaces suivantes (au choix), dessiner une triangulation (ou plusieurs), et calculez le nombre $S - A + F$:

- un disque (Remarque : *on l'a déjà fait...*).
- une sphère (Remarque : ça aussi on l'a déjà fait ! !)
- un cylindre ou un anneau[6] (Aide : comment le dessiner de manière agréable dans le plan ? Pensez à ce qu'un topologue a le droit de faire...).
- un ruban de Möbius (Aide : c'est plus facile de dessiner sur la bande de départ qu'après le recollement, en *imaginant* qu'on va recoller la bande ensuite...).

[6] C'est-à-dire la forme du rouleau de carton autour duquel on enroule du sopalin, que l'on a déjà vue à la question II.2.b.

– un tore (Aide : comment le dessiner dans le plan ? Pensez à ce qu'on a fait pour le ruban de Möbius, et aussi aux jeux vidéos du style "PacMan"...)

– un disque avec deux trous[7].

– une bouteille de Klein, un tore avec un trou...

Question 2.

Énoncez les généralisations du théorème de triangulation des polygônes aux surfaces que vous avez étudiées.

Question 3. Application

a. Dire sans calcul ce que vaut le nombre $S - A + F$ pour le polyèdre de la figure 4, puis pour celui de la figure 8.

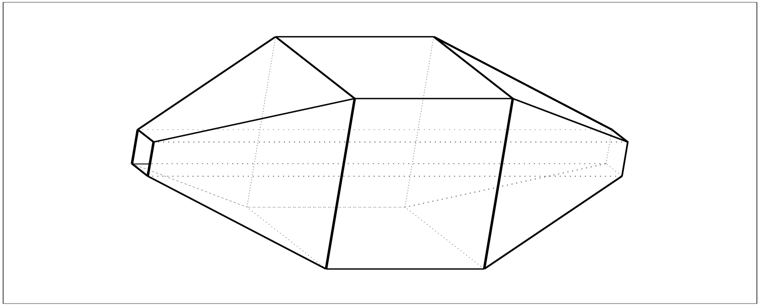

FIG. 8: Quelle est cette surface ?

[7]Cette surface s'appelle un *pantalon* ; voyez-vous pourquoi ?

b. Imaginez que vous êtes un être à deux dimensions, et que vous vivez dans une surface, *sans conscience du monde en trois dimensions dans lequel est plongé la surface*. Dans quelle mesure pouvez-vous dire quelle est la forme de cette surface ? [8]

Question 4. Conclusion

On peut énoncer le théorème suivant (que l'on admettra) :

THÉORÈME *Soit S une surface, et T une triangulation de S. Alors le nombre (S-A+F) ne dépend pas de la triangulation T, il ne dépend que du type topologique de la surface S.*

Ce nombre est donc un *invariant topologique* associé à la surface S ; on l'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la surface.

Donner la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces que vous avez étudiées.

IV. Un lien avec le point de vue du cours : comment définir formellement l'équivalence topologique ?

Reprenons le dessin d'un carré dans le plan qui se déforme en cercle (figure 9). Étant donné un point x du carré, on peut suivre son déplacement durant la déformation ; quand la déformation est finie, on obtient ainsi un point $h(x)$ dans le cercle final. En faisant ceci pour chaque point x du carré, on obtient une application h du carré dans le cercle.

Question 1.

Essayez de traduire formellement, *sur l'application* h, les idées intuitives de la définition d'équivalence topologique donnée plus haut :

[8] Si vous n'aimez pas l'idée de vivre en deux dimensions, voici une autre manière de présenter la question. Vous habitez sur une planète, et vous voulez en connaître la forme (est-ce une sphère, un disque, un tore, l'une des quatre surfaces de la question II.2.b, *etc.* ?) ; mais vous ne pouvez pas décoller de la planète, et vous ne voyez rien de l'espace autour (il y a des nuages partout). Comment faire ?

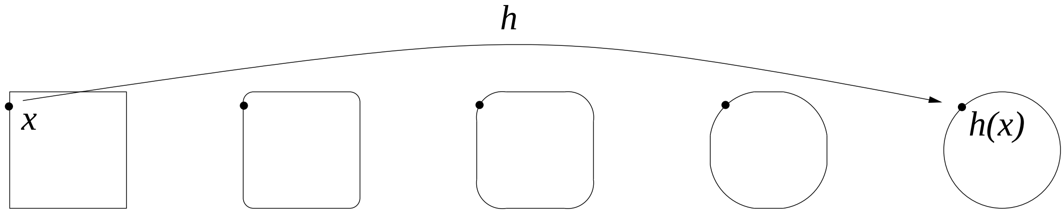

FIG. 9: Construction de l'application h.

– comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas de déchirure ?

– comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas d'écrasement ?

– coment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas de recollement ?

Sur le plan formel, l'idée de déformation continue est assez lourde à définir ; en réalité, on définit l'équivalence topologique en conservant uniquement les propriétés de la fonction finale h : si E et F sont deux parties du plan (comme le carré et le cercle), elles sont dites topologiquement équivalentes (ou *homéomorphes*) s'il existe une application h de E dans F qui est une bijection, continue, dont la réciproque est continue. Une telle application s'appelle un *homéomorphisme*.

Formellement, la topologie est donc l'étude de toutes les propriétés qui sont conservées par les homéomorphismes. Par exemple, les notions de fermés, d'ouverts, la compacité, la connexité par arcs, sont des notions topologiques (pourquoi ?...).

La topologie ne concerne pas uniquement les parties de $\mathbb{R}^n$: il existe beaucoup d'ensembles sur lesquels on peut mettre des structures topologiques, c'est-à-dire définir des notions d'ouverts et de fermés, et donc de continuité. C'est le cas par exemple des espaces vectoriels de fonctions, ou encore de l'ensemble des courbes du plan ; ceci permet de donner un sens à l'idée de deux fonctions (ou de deux courbes) "proches" l'une de l'autre. Ces différentes structures topologiques jouent un rôle très important en Analyse, par exemple dans la transformation de Fourier, ou dans la théorie des distributions. Explications dans un cours de Licence...