Transformation de graphes de fonctions, version longue

Source: `transformation-de-graphes2.tex`.
Version imprimable: `transformation-de-graphes2.pdf`
Fonctions d'une variable réelle. DEUG première année. Angle pédagogique : *Visualisation.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice relie géométrie et formules, de manière progressive.*

Question 1. Expérimentation

a. Dessiner le graphe de la fonction exponentielle.

b. En vous aidant éventuellement d'une calculatrice graphique, dessiner sur le papier les graphes des quatre fonctions suivantes : $-\exp(x)$; $\exp(x)+1$; $\exp(x)-1$; $2\exp(x)$.

Par quelles transformations géométriques passe-t-on du graphe de l'exponentielle aux graphes tracés ?

c. Mêmes questions pour les quatre fonctions $\exp(-x)$; $\exp(x+1)$; $\exp(x-1)$; $\exp(2x)$.

Question 2. Énoncé des correspondances

a. Relier chaque formule à la transformation géométrique qui lui correspond.

1. $-f(x)$;	1. translation vers le haut ;
2. $f(x)+1$;	2. translation vers le bas ;
3. $f(x)-1$;	3. translation vers la gauche ;
4. $2f(x)$;	4. translation vers la droite ;
5. $f(-x)$;	5. symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
6. $f(x+1)$;	6. symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
7. $f(x-1)$;	7. dilatation d'un facteur 2 dans le sens vertical ;
8. $f(2x)$.	8. dilatation d'un facteur 1/2 dans le sens horizontal.

b. Quelle formule correspond à une homothétie de rapport 2, centrée en l'origine ? À une rotation d'un demi-tour, centrée en l'origine ?

Question 3. Applications

Tracer le plus rapidement possible les graphes des applications suivantes. On commencera par tracer le graphe de la fonction élémentaire utilisée (sinus, cosinus, *etc.*). On pourra vérifier le dessin à l'aide d'une calculatrice graphique.

a. $f_1(x) = \sin(x) + 1$; $f_2(x) = -\cos(x)$; $f_3(x) = \ln(-x)$ (test de la réponse : quel est son ensemble de définition ?) ; $f_4(x) = 2\sqrt{x}$; $f_5(x) = \sin(2x)$; $f_6(x) = \sqrt{x+1}$ (tester l'ensemble de définition).

b. Plus difficile : $f_7(x) = 2\sin(x) + 1$; $f_8(x) = \ln(2x+1)$; $f_9(x) = \sin(2x) + 1$; $f_{10}(x) = 2\ln(x+1)$.

En déduire le tableau de variations de chacune de ces fonctions, *sans calcul de dérivée*.

Question 4. Une démonstration

a. Soit H l'homothétie du plan $\mathbb{R}^2$ centrée en l'origine et de rapport $1/2$. Donner une formule pour $H(x, y)$.

b. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{G}$ son graphe. Démontrer que le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(2x)$ est l'image de $\mathcal{G}$ par l'homothétie H.
