Suite des puissances d'un nombre complexe

Sources et figures: suites-complexes/.

Version imprimable: suites-complexes.pdf

Suites. DEUG première année. Angle pédagogique : *Expérimental.*

Objectifs et commentaires. *Le but principal de l'exercice est de voir une suite qui a comportement "compliqué" (ni convergente ni périodique), bien qu'étant définie par une formule simple et "naturelle"; d'ailleurs, cette suite joue un rôle dans de nombreux phénomènes (voir le commentaire à la fin de l'exercice).*

Au passage, on révise le comportement des suites géométriques dans les cas déjà connus, et on peut comprendre géométriquement la multiplication complexe.

La deuxième partie est prévue pour être distribuée après que les étudiants aient résolu le cas facile.

Proposition de piste à fournir aux étudiants *L'étude devrait avoir deux grandes étapes :*

1) les cas faciles, quand le module de z est différent de 1 ;

2) le cas $|z| = 1$; ce deuxième cas se subdivise bien sûr en rationnel/irrationnel (voir ci-dessous).

Cas faciles

– S'ils bloquent dès le début, leur faire remarquer que le comportement dépend sans doute du choix du nombre z (il y a une infinité de questions cachée dans la questions !), il va peut-être falloir séparer l'étude en différent cas : il faut commencer par "classer les 'z' dans des boîtes"; comment trouver le critère de répartition (les étiquettes sur les boîtes !) ? Bien sûr, il faut prendre des exemple de valeurs de z. Une bonne idée est de commencer par le cas réel (ils connaissent déjà, et ça va servir).

– Une remarque clé est d'utiliser l'écriture "coordonnées polaires" en module/argument (savoir choisir la représentation des complexes adaptée au problème est certainement un objectif pédagogique important !) : en effet, elle s'entend bien avec la multiplication.

– Il faudra utiliser $|ab| = |a||b|$. Et le cas des suites géométriques réelles.

– Une fois terminée l'étude des cas faciles, demander un dessin (par exemple pour $z = 1/2$, puis $z = 1/2 \times \exp(i\pi/6)$, pour que l'on voit bien que la suite "tourne").

Cas difficiles *Une fois les cas faciles résolus et les cas difficiles identifiés, on peut leur distribuer la seconde partie de l'énoncé, qui décompose la démarche pour les cas difficiles.*

I.

On se donne un nombre complexe z. Étudier, en fonction de z, le comportement de la suite

$$(z^n)_{n\geq 0}.$$

Aide : il y a des cas facile, et des cas difficiles. Essayer de trouver rapidement les cas faciles !

II.

On suppose que vous avez résolu le cas facile, quand le module de z est différent de 1. On s'intéresse maintenant aux cas difficiles.

Question 1. Cas périodique

Essayer de trouver tous les z tels que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ soit périodique. Autrement dit, compléter l'énoncé suivant :

THÉORÈME *La suite* $(\exp(2i\pi n\theta))_{n\geq 0}$ *est périodique si et seulement si ...*

Question 2. Cas non périodique

(i). — Donner un exemple de nombre z tel que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne soit pas périodique.

(ii). — On suppose que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas périodique. Montrer que dans ce cas, elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

(iii). — Traduire en symboles mathématiques la propriété suivante (pour le moment, on ne demande pas de la démontrer !) :
On peut trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 *dans* $\mathbb{C}$.

(iv). — Compléter l'énoncé suivant (on l'appelle "principe des tiroirs") :
Si on a 1000 *points distincts sur le cercle unité, alors il y en a forcément deux qui sont à distance plus petite que ....*

À l'aide de ce principe, démontrer que l'on peut effectivement trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 dans $\mathbb{C}$.

(v). — En déduire que tout arc de cercle de longueur plus grande que ... contient (au moins) un point de la suite.

(vi). — En déduire que tout arc de cercle contient une infinité de points de la suite...

III. Commentaires

Il existe de très nombreux problèmes dans l'étude desquels apparaît la suite des puissances d'un nombre complexe de module 1. En fait, ce genre de suite apparaît dès qu'on étudie une situation où se superposent deux phénomènes périodiques de périodes différentes.

Voici un premier exemple simple. La terre tourne autour du soleil en environ 365,24 jours ; c'est pourquoi l'année de notre calendrier grégorien (qui est un calendrier solaire) comporte en moyenne 365,24 jours (365 ou 366 selon que l'année est bissextile ou pas). Une lunaison dure environ 29,53 jours ; c'est pourquoi l'année du calendrier musulman (qui est un calendrier lunaire) comporte en moyenne 12*29,53=354,36 jours (354 ou 355 jours selon que l'année selon que l'année est normale ou *abondante*). C'est pourquoi le début du ramadan (le 237^{ieme} jour de l'année musulmane) correspond chaque année à un jour différent du calendrier grégorien. Existera-t-il une année où le ramadan commencera le 1^{er} janvier ? En réfléchissant un peu, vous devriez comprendre pourquoi la réponse à cette question est liée au comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ avec $z = e^{i2\pi\frac{354,36}{365,24}}$.

Et maintenant un exemple nettement plus sophistiqué. On considère une planète $\mathcal{P}$ (par exemple, la Terre) soumise à l'attraction gravitationnelle d'une étoile $\mathcal{E}$ (le Soleil). Si la planète $\mathcal{P}$ n'est pas soumise à d'autres forces, on sait (depuis Newton) écrire et résoudre les équations du mouvement du système. En particulier, on sait que, dans ce cas, la planète $\mathcal{P}$ a un mouvement périodique, et que sa trajectoire est une ellipse "autour" de l'étoile $\mathcal{E}$. Notons T la période de "rotation" de la planète $\mathcal{P}$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. Supposons maintenant qu'il existe une deuxième panète $\mathcal{P}'$ nettement plus grosse que $\mathcal{P}$ (par exemple, Jupiter) qui gravite autour de $\mathcal{E}$, et notons T' la période de rotation de $\mathcal{P}'$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. La planète $\mathcal{P}'$ exerce une force d'attraction gravitationnelle sur la planète $\mathcal{P}$. Cette force est très petite par rapport à l'attraction de l'étoile $\mathcal{E}$; néanmoins, au bout d'un très long temps, cette force pourrait faire dévier beaucoup la planète $\mathcal{P}$, et même l'ejecter du système. La force d'attraction que la planète $\mathcal{P}'$ exerce sur la planète $\mathcal{P}$ perturbe-t-elle beaucoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$? Un théorème mathématique (difficile et profond) affirme que la réponse dépend en particulier du comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ où $z = e^{i2\pi\frac{T}{T'}}$: si les termes de cette suite ne sont pas "bien répartis" sur le cercle unité, alors l'attraction de la planète $\mathcal{P}'$ risque de perturber beacuoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$.

IV. Bilan

Le but était d'étudier, en fonction du nombre complexe z, le comportement de la suite

$$(z^n)_{n\geq 0}$$

et de voir que cette suite, pourtant définie de manière extrêmement simple, a un comportement très compliqué pour certaines valeurs de z.

Même si les cas intéressants ne sont pas ceux où la suite possède une limite, commençons par quelques rappels et remarques sur la limite d'une suite de nombre complexes.

Définitions On dit qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers un nombre complexe c si le module de $u_n - c$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On dit qu'une suite de nombre complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini si le module de u_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Remarque Dans $\mathbb{R}$, il y avait deux manières d'aller à l'infini : tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. Mais dans $\mathbb{C}$, tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a aucun sens. C'est pourquoi la définition ci-dessus ne définit qu'une seule manière de tendre vers l'infini.

Passons maintenant à l'étude de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$. Pour ce faire, on écrit $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in [0, +\infty[$ est le module de z et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z. On voit alors que

$$\text{pour tout } n \geq 0, \text{ on a } z^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Autrement dit, le module de z^n est ρ^n, et l'argument de z^n est $n\theta$.

Remarque Si on écrit z sous la forme $a + ib$ (avec a et b réels), on est bien en peine pour calculer z^n (sauf dans les cas très particuliers où z est réel ou imaginaire pur). On peut essayer d'utiliser le binôme de Newton, mais ça donne une formule inutilisable. Moralité : *quand on veut calculer les puissances d'un nombre complexe z, il faut écrire z sous la forme $\rho e^{i\theta}$, et surtout pas sous la forme $a + ib$.* [1]

Cas où le module de z est différent de 1

Si ρ est strictement plus grand que 1, alors ρ^n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Par conséquent, si le module de z est strictement plus grand que 1, alors la suite $(z^n)_{n\geq n}$ tend vers l'infini dans $\mathbb{C}$ (voir la définition ci-dessus).

Si ρ strictement plus petit que 1, alors ρ^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, si le module de z est strictement plus petit que 1, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans $\mathbb{C}$.

Cas où le module de z est égal à 1

Il reste à considérer le cas où le module de z est égal à 1. On commence par remarquer que, dans ce cas, le module de z^n est égal à 1 pour tout n ; autrement dit, tous les termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ sont sur le cercle unité. Ceci est loin de déterminer complètement le comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$.

Pour essayer de visualiser le comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$, on remarque que chaque terme de la suite est obtenu à partir du précédent par une rotation de centre 0 et d'angle θ (où θ est l'argument de z). Ceci permet de dessiner facilement les premiers termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$: on part de $z^0 = 1$, on "tourne de θ" pour obtenir z, on "tourne de θ" pour obtenir z^2, *etc.*.

Il est alors naturel de se poser les questions suivantes : la suite repasse-t-elle plusieurs fois par la même valeur ? Est-elle périodique ? Sinon, que dire de son comportement ? On démontre d'abord le résultat suivant :

Théorème *La suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est périodique si et seulement si le module de z est égal à* 1 *et l'argument de z est un nombre rationnel multiplié par 2π.*

Le théorème nous dit en particulier que si l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas périodique. Plaçons-nous dans ce cas. On montre alors que les termes de la suite sont tous distincts. En utilisant le *principe des tiroirs*, on en déduit qu'il existe "des termes de la suite situés aussi près qu'on veut de 1". Puis, on en déduit que dans chaque arc (même très petit) du cercle unité, il y a une infinité de termes de la suite. Une autre façon de le dire est que la suite passe (et repasse une infinité de fois) aussi près qu'on veut de chaque point du cercle unité... On dit que la suite est *dense dans le cercle unité.*

Théorème *Si l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est dense dans le cercle unité.*

Remarque Attention, même dans ce dernier cas, la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne passe pas par chaque point du cercle unité. Ce qu'on a montré, c'est qu'elle passe arbitrairement près de chaque point du cercle unité ; c'est très différent.

[1] Plus généralement, pour chaque problème concernant les nombres complexes, il faut se demander laquelle des deux formes ($a + ib$ ou $\rho e^{i\theta}$) va être la plus adaptée au problème.

En résumé

• Si $|z| > 1$, alors la suite tend vers l'infini.
• Si $|z| < 1$, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.
• Si $|z| = 1$, et que l'argument de z est un rationnel multiplié par 2π, alors la suite est périodique.
• Enfin, si $|z| = 1$, et que l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite est dense dans le cercle unité.

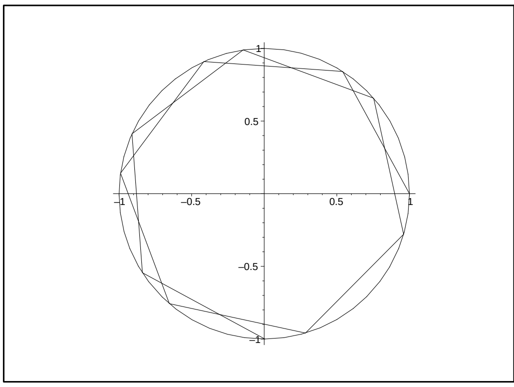
Commentaires

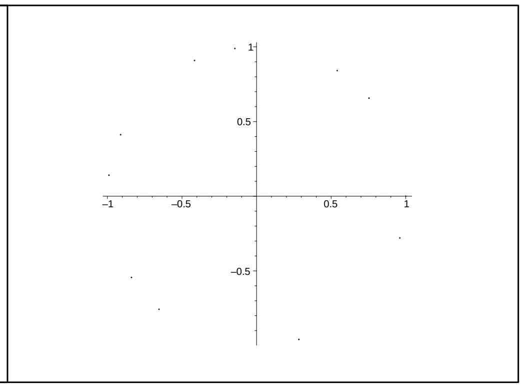
1 - Considérons la suite de nombres réels $(\cos n)_{n\geq 0}$. On remarque que, quel que soit n, le réel $\cos n$ n'est autre que la partie réelle du nombre complexe z^n avec $z = e^i = e^{i\times 1}$. Comme 1 n'est pas de la forme $2\pi\theta$ avec θ rationnel, il résulte de ce qui précède que tout arc du cercle unité contient une infinité de termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$. On peut en déduire que tout intervalle inclus dans $[-1, 1]$ contient une infinité de termes de la suite $(\cos n)_{n\geq 0}$. Autrement dit :

Corollaire *La suite* $(\cos n)_{n\geq 0}$ *passe, et repasse une infinité de fois, aussi près qu'on veut de chaque point de* $[-1, 1]$. *On dit que la suite* $(\cos n)_{n\geq 0}$ *est* dense dans $[-1, 1]$.

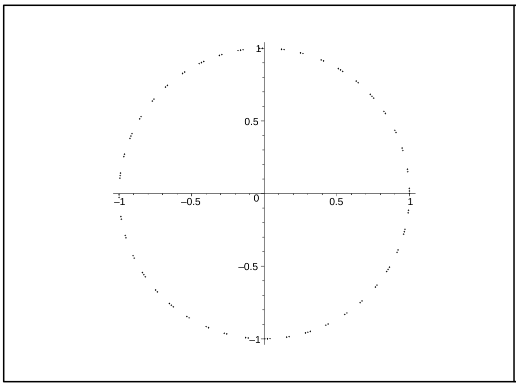
2 - L'arithmétique et l'étude des suites semblent *a priori* être des domaines mathématiques disjoints. Pourtant, on a vu ci-dessus un lien entre une propriété arithmétique d'un nombre (l'argument de z) et le comportement d'une suite (la suite $(z^n)_{n\geq 0}$). En fait, il existe de nombreux liens de ce type.

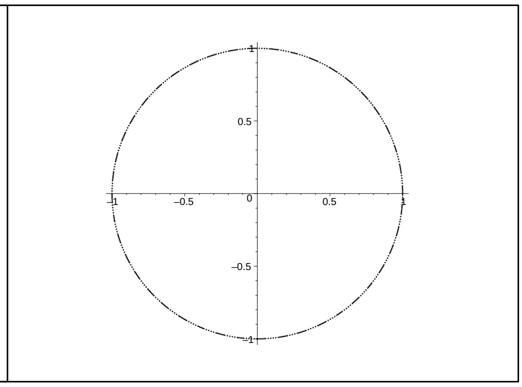
Dessins Ci dessous, on a représenté la suite z^n avec $z = e^i$: les 10 premiers points (1) en les reliant, (2) sans les relier ;





Toujours pour la même suite, (3) les 100 premiers points, (4) les 500 premiers points.





De même, de bas en haut, les 10, 100, 500 premiers points de la suite $(\cos n)$ dans le segment $[-1, 1]$.