Exercices Alternatifs

Quelqu'un aurait-il vu passer un polynôme ?

Sources et figures: `polynome-lagrange/`.
Version imprimable: `polynome-lagrange.pdf`

Polynômes. DEUG première année. Angle pédagogique : *Expérimental.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice a été proposé en travail en groupe de quatre. La plupart des étudiants, avec un peu de temps, arrivent à trouver un énoncé satisfaisant (existence et unicité avec la condition de degré). Le plaisir d'avoir fabriquer un théorème les a marqué.*

Il est assez rejouissant de voir des étudiants trouver également eux-même la formule d'interpolation, alors qu'il y a souvent un blocage quand on la leur donne d'emblée. Notons que la preuve de l'unicité est très difficile à trouver pour eux (bien que très courte).

I. Introduction

Tous les logiciels de dessin assisté par ordinateur, possède une fonction de tracé de courbe passant par des points spécifiés : avec la souris, on marque un certain nombre de points sur l'écran, et l'ordinateur se charge de trouver une courbe qui passe par ces points. Quitte à utiliser assez de points, on peut ainsi tracer n'importe quel contour.

Comment l'ordinateur fait-il pour trouver une courbe qui passe par des points donnés ? En fait, en général, il cherche un polynôme dont le graphe passe par ces points (une fois un tel polynôme trouvé, l'ordinateur n'a aucun mal à tracer son graphe). Mais un tel polynôme existe-t-il toujours ? Si oui, comment l'ordinateur fait-il pour le trouver ?

II. Énoncé

On est donc confronté au problème mathématique suivant : *si on se donne un certain nombre de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, existe-t-il des polynômes dont le graphe passe par ces points ? en existe-t-il un seul ? sinon, en existe-t-il un plus simple que les autres ? quand il en existe un, peut-on trouver une formule le donnant ?*

On vous demande d'essayer de "fabriquer" un énoncé de théorème qui réponde à toutes ces question. Bien sûr, pour cerner l'énoncé le plus précis et le plus "joli" possible, il faut commencer par "expérimenter". Voici quelques pistes de recherche (avec l'idée : quand un problème est trop difficile, *il faut essayer de le simplifier*, par exemple en commençant par des cas particuliers...) :

- Avez-vous une idée intuitive de la réponse ?
- Essayer avec 2 points. Comment peut-on formuler le résultat dans ce cas-là ? Essayer de donner le "meilleur" énoncé possible.
- Que dire si tous les points sont situés sur l'axe des abscisses (par exemple avec trois ou quatre points) ?
- Que dire si tous les points *sauf un* sont sur l'axe des abscisses ? Si tous les points *sauf deux* sont sur l'axe des abscisses ?...

III. Bilan

Rappelons qu'étant donné un nombre fini de points dans le plan, on cherche à répondre aux questions suivantes : existe-t-il toujours un polynôme dont le graphe passe par ces points ? ce polynôme est-il unique ? en existe-t-il un qui soit "plus simple que les autres" ? peut-on trouver une formule définissant ce polynôme ?

La réponse à toutes ces questions est résumée par le théorème suivant.

Théorème *Soient $M_1, \ldots, M_n$ des points deux à deux distincts dans $\mathbb{R}^2$. Notons $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ les coordonnées de ces points, et supposons que les abscisses $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distinctes. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$; ce polynôme est donné par la formule suivante :*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

La formule ci-dessus a été découverte par le mathématicien Joseph Louis Lagrange (voir sa biographie à la fin du texte) ; on parle du "polynôme de Lagrange associé aux points $M_1, \ldots, M_n$". Notons que le théorème 1 est un résultat très satisfaisant : c'est un résultat d'existence et d'unicité, le degré du polynôme ne croit pas très vite en fonction du nombre de points, et on a une formule très facile à rentrer dans un ordinateur si on souhaite faire des calculs explicites. Remarquons par ailleurs que ce résultat est optimal, au sens où :

- l'hypothèse sur les abscisses des points $M_1, \ldots, M_n$ est nécessaire ; en effet, si ces abscisses ne sont pas deux à deux distinctes, alors il ne passe aucun graphe de fonction par les points $M_1, \ldots, M_n$; en particulier, il ne passe aucun graphe de polynôme ;
- le polynôme exhibé dans l'énoncé ci-dessus est de degré minimal ; en effet, sauf si les points $M_1, \ldots, M_n$ sont disposés de façon spéciale, il n'existe aucun polynôme de degré strictement inférieur à $n-1$ dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$;
- dès que d est supérieur ou égal à n, il existe une infinité de polynômes de degré d dont les graphes passent par les points $M_1, \ldots, M_n$.

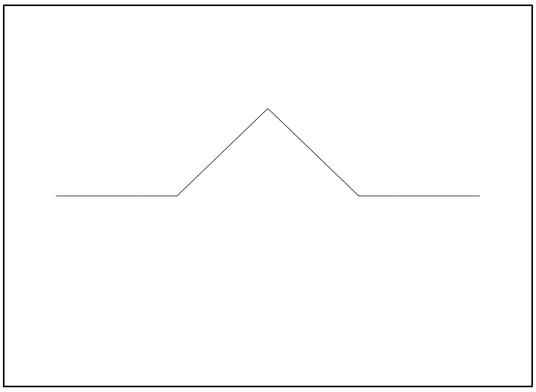
Revenons maintenant à la question du tracé de courbes dans les logiciels de DAO (dessin assisté par ordinateur). Rappelons de quoi il s'agit : pour dessiner un objet, les logiciels de DAO proposent habituellement à l'utilisateur de placer avec la souris un certain nombre de points par lesquels doit passer le contour de l'objet à dessiner ; l'ordinateur se charge alors de trouver une courbe qui passe par ces points. Mathématiquement, une courbe est une application de l'intervalle $[0, 1]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On peut chercher une courbe polynômiale, c'est-à-dire sous la forme

$$t \longmapsto (P(t), Q(t))$$

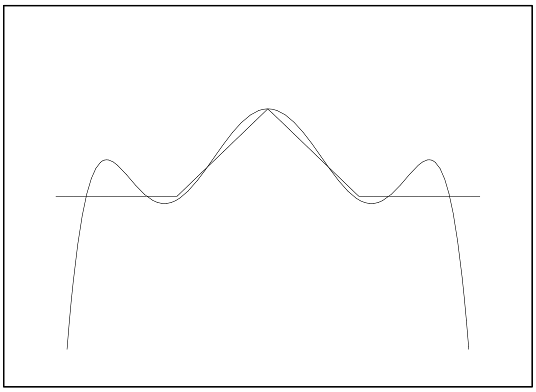
où P et Q sont des polynômes.

Les polynômes de Lagrange fournissent en théorie une solution à ce problème. Néanmoins, ces polynômes ne sont jamais utilisés tels quels par les logiciels de dessin. Ceci est dû au phénomène décrit ci-dessous.

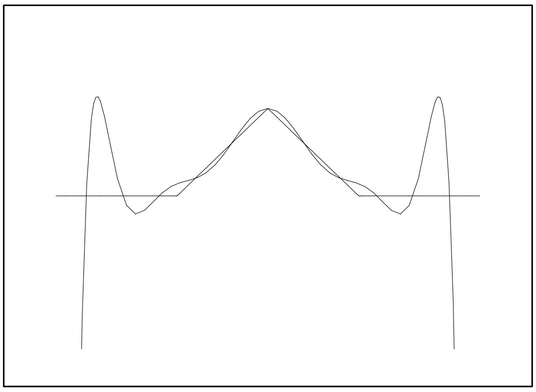
Supposons qu'on veuille tracer un contour ayant la forme suivante :



On place 7 points régulièrement répartis sur ce contour, et on trace le polynôme de Lagrange associés à ces points. On obtient ceci :



Le graphe du polynôme de Lagrange approche assez bien le contour souhaité dans la zone situé vers le milieu de la fenêtre, mais pas très bien sur les côtés. Il devrait suffir de rajouter des points... Avec 10 points ; on obtient ceci :



Hélas, ca ne s'arrange pas ! En fait, ça a même tendance à empirer : sur les côtés, le graphe du polynôme de Lagrange s'éloigne du contour souhaité. Ce phénomène s'appelle *phénomène de Runge.* On peut vérifier qu'augmenter le nombre de points ne fait qu'accentuer le phénomène. On est en fait confronté au problème suivant : *même si deux courbes ont beaucoup de points en commun, ces courbes ne sont pas nécessairement proches (entre deux points communs successifs, les courbes peuvent s'éloigner beaucoup l'une de l'autre).* Les solutions trouvées dans les logiciels de dessins sont de deux types :

- faire des "polynômes de Lagrange" par morceaux : si on cherche une fonction dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$, on peut considérer le polynôme de Lagrange P_1 associé aux points M_1, M_2, M_3, le polynôme de Lagrange P_2 associé aux points M_2, M_3, M_4, le polynôme de Lagrange P_3 associé aux points M_3, M_4, M_5, etc., puis faire une sorte de combinaison de ces polynômes pour trouver une fonction dont le graphe passe par tous les points $M_1, \ldots, M_n$. Ceci diminue les effets de bords ;
- utiliser des polynômes dont le graphe ne passe pas exactement par les points spécifiés, mais seulement près de ces points, et qui approche mieux le contour qu'on veut dessiner (en fait, qui approche mieux la ligne brisée joignant les points successifs). On peut alors utiliser une autre famille de polynômes, appelés *polynômes de Tchebychev.*

Bien entendu, Lagrange, qui est mort en 1813, n'a pas inventé les polynômes qui portent son nom pour résoudre des problèmes de dessin sur ordinateur. Le but de Lagrange était de montrer qu'on peut approcher n'importe quelle fonction par une fonction très simple (ici une fonction polynomiale). Cette démarche est à rapprocher de celle du mathématicien et physicien Joseph Fourier (1768-1830) qui a expliqué comment approcher toute fonction par une somme de fonctions sinus et de cosinus. Terminons avec quelques indications sur la vie et l'oeuvre de Lagrange.

IV. Bibliographie

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) est né à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne, dans une famille bourgeoise, mais relativement peu fortunée. Son intérêt pour les mathématiques naît de la lecture des travaux de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Ses premiers travaux mathématiques, portant sur l'application du calcul des variations à la mécanique, lui valent d'être élu membre de l'Académie de Berlin dès l'âge de vingt ans. Il continue cependant à enseigner à Turin jusqu'en 1766, date à laquelle il finit par accepter un poste prestigieux à Berlin. Il passera vingt ans à Berlin, avant de rejoindre Paris où il terminera sa carrière comme Membre de l'Académie des Sciences et professeur d'Analyse à l'École Polytechnique (créée en 1794).

Lagrange est l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a apporté une contribution essentielle à des domaines aussi divers que :

– la mécanique (il développe par exemple une théorie perturbative des orbites des planètes qu'il applique pour expliquer certaines caractéristiques de l'orbite de la Lune),
– l'analyse des fonctions (c'est lui qui clarifie les notions de dérivée, et l'énoncé du théorème des accroissements finis),
– l'approximation de fonctions (il introduit à ce propos les "polynômes de Lagrange"),
– la résolution des équations polynomiales (par exemple, il montre que si P est un polynôme à coefficients réels $a_1, \ldots, a_n$, alors la valeur absolue de chaque racine réelle de P est inférieure à $1 + \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$),
– la théorie des nombres (recherche des solutions entières de certaines équations),...

Note. Vous pouvez trouver des biographies des mathématiciens les plus importants, avec un résumé de leurs contributions mathématiques, sur le site suivant :
http ://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm