

EXERCICES ALTERNATIFS

Passage au quotient pour une application

©2002 Vincent GUIARDEL (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

Source: `passage_au_quotient.tex`.

Version imprimable: `passage_au_quotient.pdf`

Théorie des ensembles, et structures de base. DEUG première année. Angle pédagogique : Langage.

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Le but de l'exercice est d'introduire le passage au quotient d'une application dans la situation la plus simple possible : la parité dans \mathbb{Z} . Il est en particulier important de donner un exemple d'application qui ne passe PAS au quotient (dernière question).*

On définit une relation \mathcal{R} sur l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont même parité}$$

(autrement dit, ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

- a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.
- b. On note \bar{x} la classe d'équivalence de l'entier x et $\overline{\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient de \mathbb{Z} par \mathcal{R} (donc, l'ensemble des classes d'équivalence).

Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ?

- c. Soient a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On veut essayer de donner un sens à cette fonction dans $\overline{\mathbb{Z}}$, c'est à dire définir une fonction $\bar{f}(\bar{x})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$ telle que $y = f(x)$, alors $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$.

(i). — Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ pair.

(ii). — Soient a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. En factorisant $f(x) - f(y)$, démontrer l'implication :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

(iii). — Comment peut-on alors définir \bar{f} ?

- d. Montrer qu'il existe une application g de \mathbb{Z} dans lui-même qui, à un entier x , associe $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$. Est-il possible de définir d'une application $\bar{g} : \overline{\mathbb{Z}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ telle que, si $y = g(x)$, alors $\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})$?