Exercices Alternatifs

Intégration d'équivalents

Source: `integration-d-equivalents.tex`.

Version imprimable: `integration-d-equivalents.pdf`

Fonctions d'une variable réelle. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Découverte.*

Objectifs et commentaires. *Manipulation d'équivalents, de la définition de la limite, intégration d'inégalités, le tout motivé par un problème ouvert. La rédaction ci-dessous est volontairement la plus concise possible (destinée à un travail en petits groupes, sur une durée assez longue). Voici quelques pistes pour guider les étudiants et éventuellement aller plus loin :*

- *essayer sur des exemples ; ce qui amène la question : trouver des fonctions simples équivalentes à $1/x$ (ce qui déjà peut amèner à revenir sur la définition du mot équivalent) ; $1/x$, $1/x+1/x^2$, $1/(x+10)$, $1/(x+ln(x))$ sont des bonnes condidates ;*
- *la conjecture la plus simple est sans doute "F tend vers $+\infty$", qu'il est déjà intéressant de prouver ;*
- *c'est l'occasion de rappeler la propriété fondamentale de positivité de l'intégrale (en pratique, intégration des inégalités) ;*
- *on peut ensuite montrer qu'en $+\infty$ la fonction F est coincée entre $\frac{1}{2}\ln$ et $\frac{3}{2}\ln$;*
- *puis prouver que $F \sim \ln$;*
- *on peut enfin s'attaquer à l'énoncé général : si f est équivalente à une fonction g positive dont l'intégrale est divergente, alors les primitives de f et de g sont équivalentes.*

Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ une fonction (supposée continue pour pouvoir être intégrée), et F une primitive de f. On suppose qu'en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

Que peut-on dire du comportement de F en $+\infty$?

Pour aller plus loin. Proposer une conjecture qui généralise cette situation. Prouver la conjecture...
