Hyperplans et famille de vecteurs en position générale

Source: `hyperplans.tex`.
Version imprimable: `hyperplans.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *Ludique.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Ce sujet propose une jolie question de mathématiques. La preuve est assez difficile à trouver, bien que la réponse semble intuitivement évidente (quoiqu'en dimension 47 ?...) Après avoir laisser les étudiants explorer la question, on leur "vend" donc un schéma de preuve ; la difficulté consiste alors à comprendre ce schéma (qui implique une récurrence subtile), et à en rédiger tous les détails de la façon la plus convainquante possible.*

Remarque sur la deuxième partie : on peut aussi montrer la version affine de cette propriété : il existe dans $\mathbb{R}^n$ une famille infinie de vecteurs telle que dès qu'on en prend $n+1$, ils sont affinement indépendants (prendre les vecteurs du type $(x, x^2, \ldots, x^n)$). Une conséquence intéressante, et immédiate, est un théorème de plongement "du type Whitney" : tout graphe se plonge dans $\mathbb{R}^3$ (sans point double, contrairement à $\mathbb{R}^2$) ; et plus généralement, tout complexe simplicial de dimension k se plonge dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ (et on comprend bien la raison du "$2k+1$"). Le plongement des graphes est probablement à la portée des étudiants de DEUG, et donnerait une motivation intéressante à l'exercice ; malheureusement, celui-ci deviendrait beaucoup plus long.

I. Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

QUESTION $\mathbb{R}^n$ *est-il réunion d'un nombre fini d'hyperplans ?*

On rappelle qu'un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Question 1. Exploration

a. Cas $n = 2$ Traduisez le problème en dimension 2. Avez-vous une idée intuitive de la réponse ? Pouvez-vous prouver que votre intuition est juste ?

b. Cas $n = 3$ Mêmes questions pour $n = 3$.

c. Cas général Avez-vous une idée de la réponse dans le cas général ? Comment pourrait-on écrire une preuve ?

Question 2. Petites questions

Commencez par répondre aux questions suivantes :

a. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$, quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

b. Même question pour un hyperplan H_1 et un plan P (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2).

Question 3. Aide à la preuve en dimension $n \geq 3$

On propose le schéma de preuve suivant :

"On raisonne par récurrence sur la dimension. On considère des hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve un vecteur e_1 qui est dans H_1 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. De même, on trouve un vecteur e_2 qui est dans H_2 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. On se place ensuite dans le plan P engendré par e_1 et e_2. En étudiant dans P les sous-espaces $H_i \cap P$, on arrive à la conclusion."

Il manque bien sûr beaucoup de détails. Rédigez soigneusement une preuve en suivant ce schéma.

II. Famille de vecteurs en position générale

Le but de cette partie est de trouver, dans $\mathbb{R}^n$, une famille $\mathcal{F}$ contenant une infinité de vecteurs et ayant la propriété suivante : dès qu'on choisit n vecteurs dans la famille $\mathcal{F}$, ils sont linéairement indépendants.

Question 1. Cas $n = 2$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^2$; trouver une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui répond à la question. Pouvez-vous en trouvez d'autres ?

Question 2. Cas $n = 3$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^3$. Essayer d'y répondre.

Question 3. Suggestion

On propose d'étudier la famille $\mathcal{F}$ contenant tous les vecteurs du type

$$v(x) = (1, x, x^2, \ldots x^{n-1}).$$

Montrer que cette famille répond au problème.

Indication Si n vecteurs sont liés, il existe un hyperplan qui les contient (pourquoi ?) ; quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$?

Question 4. Retour sur la partie I

A l'aide de la famille $\mathcal{F}$, trouver une nouvelle preuve pour la partie I.

Indication Combien de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ un hyperplan peut-il contenir au maximum ?
