Sommes des puissances p-ième des entiers

Source: `formules-de-sommes.tex`.
Version imprimable: `formules-de-sommes.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Le but de l'exercice est de montrer comment les concepts d'algèbre linéaire peuvent éclairer une question naturelle, la recherche d'une formule pour la somme des carrés (ou des cubes, etc...) des n premiers entiers.*
Par "formule", on entendra : trouver un polynôme Q_α tel que pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = Q_\alpha(n).$$

(on peut discuter cette formulation avec les étudiants, par exemple oralement, comme proposé à la question 1.)
Ici, l'efficacité de l'algèbre linéaire apparaît surtout à la question ***2.a****, qui montre une variante du principe "quand l'unicité implique l'existence" : pour montrer l'existence d'une formule, on est ramené à prouver la surjectivité d'une certaine application linéaire, et un argument de dimension (le "théorème noyau-image") permet de se ramener au calcul du noyau, qui est très simple. (Au passage, on doit dire pourquoi un polynôme périodique est nécessairement constant). La détermination explicite de la formule revient alors à inverser la matrice de Φ.*
On obtient les formules suivantes :

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6}\, N\,(N+1)\,(2\,N+1) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{1}{4}\, N^2\,(N+1)^2 \quad ;$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 = \frac{1}{30}\, N\,(N+1)\,(2\,N+1)\left(3\,N^2+3\,N-1\right).$$

Remarque : on pourrait aussi montrer a priori *que la condition donnée au* ***1.b*** *(existence de P) est nécessaire pour qu'une telle formule existe.*
Possibilité d'extension : pour quelles fractions rationnelles F existe-t-il une fraction rationnelle G telle que pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = G(n) \qquad ?$$

(indication : utiliser la remarque précédente.)

Vous connaissez la formule donnant la somme des n premiers entiers :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On voudrait savoir s'il existe des "formules analogues" pour les sommes de puissances supérieures :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 =? \qquad \text{etc...}$$

Question 1. Calcul de la somme des carrés.

a. Formulation précise : transformer la question vague en une question précise (qu'est-ce qu'une "formule analogue" ?).

b. Une idée : *supposons qu'on connaisse un polynôme P tel que $X^2 = P(X+1) - P(X)$.* On pourrait alors obtenir la formule recherchée ; voyez-vous comment ?

c. Résolution : trouver un tel polynôme P ; donner une formule pour la somme des carrés des n premiers entiers.

Question 2. Somme de puissances supérieures.

Soit α un entier supérieur ou égal à 3 ; on cherche maintenant une formule pour la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

a. En généralisant la méthode utilisée à la question 1, montrer qu'il existe une "formule analogue" à celle obtenue pour la somme des carrés ;
– **remarque :** on ne demande pas de trouver explicitement la formule, mais seulement de montrer son existence ;
– **suggestion :** on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^{\alpha+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\alpha}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

A quelle propriété de cette application peut-on relier le problème ?

b. Donner une formule pour $\alpha = 3$.

c. Expliquer la stratégie pour obtenir une formule pour $\alpha = 4$.
