Feuille 3 – Relations d'ordre et d'équivalence injectivité/surjectivité

1. Injectivité et surjectivité. Attention, les questions c et d sont laissées volontairement floues...

a. A l'aide de "patates", dessiner une application non injective, puis une application non surjective.

b. En vous aidant éventuellement des dessins, retrouver les définitions d'injectivité et de surjectivité. Ecrire ces définitions avec des mots et avec des symboles, et trouver deux formulations équivalentes de l'injectivité.

c. Interpréter les phrases suivantes en termes d'injectivité et de surjectivité :

(i) Il existe des nombres complexes différents qui ont le même carré.
(ii) Tout nombre réel positif a une racine carrée.
(iii) Le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre.
(iv) Un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelles et imaginaires.
(v) Un nombre complexe non nul est déterminé par son module et son argument.

d. "L'application qui associe à chaque individu son prénom est-elle injective, surjective? Même question pour l'application numéro de sécurité sociale".

e. L'application sinus est-elle injective? Comment cela se traduit-il, géométriquement, au niveau du graphe? Mêmes questions pour la surjectivité

f. Résoudre l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

L'application $z \mapsto e^z$ est-elle injective, surjective?

2. Intersections d'ensembles.

a. On s'intéresse au nombres de véhicules à quatre roues situés sur un parking. On a recueilli les informations suivantes:

> il y a 100 véhicules de la marque 'Renault', 85 véhicules de couleur claire, et 36 véhicules de marque Renault et de couleur foncée.

Peut-on déterminer le nombre de véhicules sur le parking? Quelle information supplémentaire permettrait de connaitre le nombre exact de véhicules?

b. Lors d'une cueillette , on a ramassé 42 champignons à chapeau convexe, 26 à lamelles, 15 à chair rose.

- Parmi les champignons à chapeau convexe, 17 avaient des lamelles et 8 une chair rose.
- Parmi les champignons à lamelles 6 (dont 2 avec un chapeau convexe) avaient une chair rose.
- Combien a-t-on ramassé de champigons? (on suppose implicitement une information supplémentaire.)
- Combien de champignons à chapeau convexe n'avaient ni la chair rose ni des lamelles?

3. Composantes connexes d'un graphe

Arwen, Bilbo, Celebrindal, Dunadan, Eowyn, Frodon, Galadriel, Hurin, Isil, James Bond, Karine, Legolas, Morwen, Nimroth, Onomatopee, Peregrin, Quinine, Radagast, Silmarien, Thorin, Uinen, Voronwe, Wendy, Xerxes, Yavanna et Zorglub sont inscrits en UD Maths et ont leurs propres opinions sur les regroupements souhaitables en TD. Ils soumettent à l'administration la liste de leurs desiderata sous la forme suivante: (A,B), (A,F), (E,P), (G,L), (G,R), (G,T), (C,H), (I,H), (M,H), (S,N), (U,V), (Y,V). Par exemple, la présence de (A,B) dans la liste signifie que Arwen veut être dans le même groupe que Bilbo.

a. Quel est le nombre minimum de groupes de TD qui permet de satisfaire tout le monde?

b. On cherche plutôt à former des groupes nombreux et petits.

(i). Si x est l'un des 26 étudiants ci-dessus, on note $f(x)$ l'ensemble des étudiants qui figurent nécessairement dans le même groupe que x d'après la liste ci-dessus, soit parce que ils ont été demandés par x, soit parce qu'ils ont demandé x. Par exemple, $f(A) = \{B,F\}$ et $f(H) = \{C,I\}$. Ecrire tous les $f(x)$.

(ii). Montrer que l'on peut former un groupe à un seul élément pour chaque étudiant isolé (c'est à dire tel que $f(x) = \emptyset$), en mettant tous les autres en-

semble.

c. On propose l'algorithme suivant de constitution du groupe de TD d'un étudiant donné x_0:

$\texttt{groupe} := \{x_0\}$
<u>répéter</u>
$\quad \texttt{delta} := \left(\bigcup_{x \in \texttt{groupe}} f(x) \right) - \texttt{groupe}$; $\texttt{groupe} := \texttt{groupe} \cup \texttt{delta}$
<u>jusqu'à ce que:</u> $\texttt{delta} = \emptyset$.

(i). Executer l'algorithme sur Arwen.

(ii). Que conclure?

d. Quel est le lien de cet exercice avec les relations d'équivalence?

4. Relations d'ordre et classement à l'issue d'un tournoi.

a. Tournoi standard. Supposons qu'il y ait 4 équipes à départager. Après un éventuel tirage au sort, le calendrier des matches est le suivant. 1ère demi-finale: l'équipe A rencontre l'équipe B; 2ème demi-finale: l'équipe C rencontre l'équipe D. Ensuite, la finale des perdants oppose les deux perdants des 2 demi-finales, et la finale oppose les gagnants des 2 demi-finales. Finalement, on distribue des médailles: or et argent pour le gagnant et le perdant de la finale, bronze et chocolat pour le gagnant et le perdant de la finale des perdants.

On suppose qu'il existe une relation d'ordre total $\leq$ entre les 4 équipes, de sorte que si deux équipes E,E' sont telles que $E < E'$, alors le match de E contre E' sera remporté par E'.

Peut-on être sûr que l'équipe médaillée d'or est supérieure aux autres? De même, peut-on être sûr que l'équipe médaillée d'argent est supérieure à celles médaillées de bronze et de chocolat? Peut-on être sûr que l'équipe médaillée de chocolat est inférieure aux autres?

Par ailleurs, pensez-vous que l'existence d'une telle relation d'ordre soit réaliste (voir aussi la question b)?

b. Tournoi exotique. Certains organisateurs de tournois sont des originaux: les tableaux suivants montrent trois de ces tournois dans lesquels 6 équipes se sont rencontrées. Les tableaux contiennent les gagnant de chaque match: par exemple, si A a gagné contre B (comme dans le tournoi 2), alors à la colonne A, ligne B on notera A (le signe - signifie qu'il n'y a pas eu de match entre les 2 équipes).

Pour chacun des trois tournois, déterminer s'il existe un ordre total comme dans la question précédente qui détermine l'issue du match. S'il en existe, le tournoi permet-il de le déterminer? Sinon, donner tous les ordres possibles compatibles avec le résultat du tournoi. S'il n'existe pas d'ordre compatible avec les résultats du tournoi, expliquer pourquoi.

Tournoi 1	A	B	C	D	E	F
A	*	-	C	D	-	-
B	-	*	B	-	-	F
C	C	B	*	-	C	C
D	D	-	-	*	E	D
E	-	-	C	E	*	E
F	-	F	C	D	E	*

Tournoi 2	A	B	C	D	E	F
A	*	A	A	D	-	A
B	A	*	C	-	-	-
C	A	C	*	-	E	-
D	D	-	-	*	D	-
E	-	-	E	D	*	E
F	A	-	-	-	E	*

Tournoi 3	A	B	C	D	E	F
A	*	-	C	-	-	-
B	-	*	-	D	B	F
C	C	-	*	-	-	-
D	-	D	-	*	-	D
E	-	B	-	-	*	-
F	-	F	-	D	-	*

c. Préordre et équipes équivalentes. Supposons qu'à l'issue d'un tournoi, il n'existe pas d'ordre sur l'ensemble des équipes qui détermine l'issue des matches. On dit qu'une équipe e' est *apparemment meilleure* que e (et on note $e \prec e'$) si il existe des équipes $e_1, \ldots, e_n$ telles que e a perdu un match contre e_1 qui a perdu un match contre e_2 qui a perdu un match contre e_3, etc. et e_n a perdu un match contre e' (on considère qu'une équipe e est apparemment meilleure qu'elle même: $e \prec e$). On dira que deux équipes e et e' sont *équivalentes* si $e \prec e'$ et $e' \prec e$.

Montrer que la relation $\prec$ est une relation de pré-odre, c'est à dire qu'elle est transitive et réflexive. Donner un exemple où elle n'est pas anti-symétrique.

Montrer que la relation «*e et e' sont équivalentes*» est une relation d'équivalence. Quelles ses classes déquivalences dans le premier tournoi ?

d. Démontrer le résultat suivant:

(i) Si $\prec$ est une relation de pré-ordre sur un ensemble, alors la relation $\sim$ définie par

$$x \sim y \iff x \prec y \text{ et } y \prec x$$

est une relation d'équivalence.
(ii) De plus, si X et Y sont deux classes d'équivalences pour la relation $\sim$, si il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $x \prec y$, alors pour tout $x' \in X$ et tout $y' \in Y$, on a $x' \prec y'$; proposer alors une définition pour une relation (entre les classes déquivalence) qu'on noterait $X \prec Y$.
(iii) Démontrer que la relation $X \prec Y$ définie au dessus est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$.

e. Que peut-on déduire du résultat précédent à propos des classes d'équivalence dans un tournoi ?

5. a. On considère un ensemble de boites (avec des couvercles). On dit qu'une boite x *rentre* dans une boite y s'il est possible de mettre la boite x à l'intérieur de la boite y et de fermer le couvercle de y. La relation *rentrer dans* est-elle une relation d'ordre? total?

b. Supposons que toutes les boites soient des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles. Chacune est ainsi caractérisée par 3 dimensions: sa largeur l, sa profondeur p et sa hauteur h. Comment se traduit numériquement le fait qu'une boite rentre dans une autre si on s'interdit de tourner les boites (de sorte que la largeur de l'une reste parallèle a la largeur de l'autre etc.).

6. Ordre lexicographique. Considérons l'ordre suivant $\prec$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini par

$$(p,q) \prec (p',q') \text{ si } p < p' \text{ ou } (p = p' \text{ et } q \leq q').$$

a. Expliquer le lien entre l'ordre $\prec$ et l'ordre du dictionnaire (l'ordre alphabétique).

b. Décrire l'ensemble des éléments inférieurs à $(5,7)$.

c. Montrer que $\prec$ est un ordre total.

d. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ possède-t-il un plus petit élément ?

e. En utilisant que toute suite décroissance dans $\mathbb{N}$ est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang), montrer que tout suite décroissante dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pour l'ordre $\prec$) est stationnaire.

7. Ordre sur $\mathbb{C}$. Considérons un ordre total $\prec$ sur $\mathbb{C}$. Disons qu'un tel ordre est *raisonnable* si on a les deux propriétés suivantes:

- si $a \prec b$, alors $a + c \prec b + c$
- si $a \prec b$ et $c \succ 0$, alors $ac \prec bc$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il n'existe pas d'ordre raisonnable sur $\mathbb{C}$.

a. Existe-t-il un ordre total sur $\mathbb{C}$?

Supposons maintenant que $\prec$ soit un ordre raisonnable. On veut aboutir à une contradiction.

b. Démontrer que si $x \succ 0$, alors $-x \prec 0$.

c. Démontrer que si $x \succ 0$ alors $x^2 \succ 0$.

d. Démontrer que si $x \prec 0$ alors $x^2 \succ 0$.

e. Déduire des questions précédentes que $1 \succ 0$, et en déduire à la fois que $-1 \prec 0$, et $-1 \succ 0$, ce qui est impossible.

8. Codage des parties d'un ensemble fini

Dans tout l'exercice, on notera $B = \{0,1\}$ (*ensemble des "bits"*).

Soit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). A toute partie A de E, on associe son *application caractéristique*:

$$\chi_A \ : \ \begin{cases} E \to B \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

On peut coder l'application χ_A par un *vecteur de bits* ("bit vector") $V_A = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$, où $\epsilon_i = \chi_A(a_i)$. Autrement dit, le i-ème bit ϵ_i est mis à 1 si a_i est élément de A, sinon, il est mis à 0[1].

a. On prend ici $n = 3$ et $E = \{1,2,3\}$. Enumérer toutes les parties de E. Pour chacune, expliciter son application caractéristique ainsi que le vecteur de bits associé. On présentera les résultats sous forme de tableau.

b. *(i).* On se replace dans le cas général (n quelconque). Montrer que l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E,B)$ qui à une partie A de E associe sa fonction caractéristique χ_A est bijective. Pour cela, on explicitera son application réciproque.

(ii). Montrer de même que l'application $\mathcal{P}(E)$ dans B^n qui à une partie A de E associe son vecteur de bits V_A est bijective.

(iii). En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

c. *(i).* On note $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$ (*bit complémentaire*); autrement dit, $\forall \epsilon \in B$, $\overline{\epsilon} = 1 - \epsilon$. Pour tout vecteur de bits $V = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) \in B^n$, on note $\overline{V} = (\overline{\epsilon_1},\ldots,\overline{\epsilon_n})$. A quelle partie de A correspond le vecteur de bits $\overline{V_A}$?

(ii). Décrire de même le vecteur de bits associé à $A \cup A'$, à $A \cap A'$.

9. Le procédé diagonal de Cantor

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n > n$. En déduire que, pour tout ensemble fini E, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$.

b. On prend maintenant $E = \{1,\ldots,n\}$. On considère n parties de E, notées $A_1,\ldots,A_n$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $V_{A_i} = (\epsilon_{i,1},\ldots,\epsilon_{i,n})$ le vecteur de bits associé. Puis, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $\epsilon'_i = \overline{\epsilon_{i,i}}$. On note enfin $V' = (\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_n)$ et A' l'unique partie de E dont le vecteur de bits associé est V'.

(i). Donner un exemple de ces constructions, sous forme de tableau, lorsque $n = 10$.

(ii). En général, montrer que A' n'est égal à aucune des parties A_i. On raisonnera par l'absurde: si l'on avait $A' = A_i$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,n\}$, quelle serait la valeur du i-ème bit du vecteur associé à cette partie?

(iii). Retrouver ainsi le résultat de la question a. Indication : si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on note $A_1 = f(1),\ldots,A_n = f(n)$; on constate alors que la partie A' construite ci-dessus n'appartient pas à l'ensemble image de f.

(iv). Vérifier que $A' = \{i \in E \ / \ i \notin A_i\}$.

c. On s'inspire ici de la question b pour démontrer le théorème suivant: E étant un ensemble *quelconque*, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. Supposons donc que f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Posons:

$$A' = \{x \in E \ / \ x \notin f(x)\}.$$

(i). Vérifier que cette définition a bien un sens.

(ii). Montrer qu'il n'existe aucun élément x de E tel que $A' = f(x)$. On raisonnera par l'absurde: si l'on avait $A' = f(x)$, aurait-on $x \in A'$ ou $x \notin A'$?

(iii). Conclure.

(iv). Pourquoi, dans l'énoncé du théorème, a-t'on précisé que l'ensemble E était "quelconque"?

10. Passage au quotient pour une application

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs par:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont même parité}$$

(autrement dit, ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

b. On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de l'entier x et $\overline{\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}$ (donc, l'ensemble des classes d'équivalence).

(i). Vérifier que $\overline{0} \neq \overline{1}$. Montrer que, quel que soit l'entier x, sa classe $\overline{x}$ est égale à $\overline{0}$ ou à $\overline{1}$.

(ii). En déduire que $\overline{\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\overline{1}\}$ et que l'ensemble quotient $\overline{\mathbb{Z}}$ a exactement deux éléments.

1. C'est la méthode utilisée dans le langage PASCAL (par exemple) pour coder le type de données *ensemble*.

c. *(i).* Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y$ pair.

(ii). Soient a,b,c des entiers. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$. Factoriser $f(x) - f(y)$ et en déduire l'implication:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

(iii). En déduire l'existence d'une unique application $\overline{f} : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ telle que, si $y = f(x)$, alors $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

d. Montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{Z}$ dans lui-même qui, à un entier x, associe $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$. Est-il possible de définir d'une application $\overline{g} : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ telle que, si $y = g(x)$, alors $\overline{y} = \overline{g}(\overline{x})$?

11. Relation d'équivalence définie par une application

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E par:

$$\forall x,y \in E \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a. Vérifier que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence. Démontrer que la classe d'équivalence de $x \in E$ est $f^{-1}(f(x))$.

b. Soit $\overline{E}$ l'ensemble quotient. Montrer que l'on peut définir $\overline{f}$ de $\overline{E}$ dans F par $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$. Montrer que l'application $\overline{f}$ est injective et qu'elle a le même ensemble image que l'application f.

c. Traiter complètement les deux exemples suivants:

- $E = F = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x$.
- $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

On précisera dans chaque cas l'ensemble image.