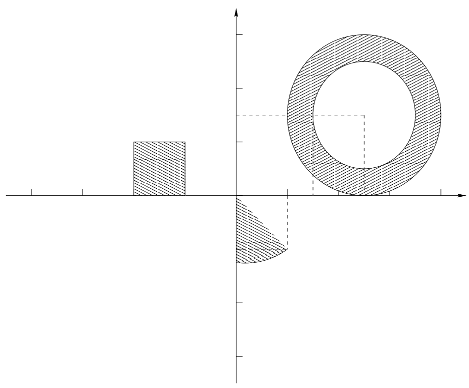
Université Paul Sabatier
Toulouse III

2002/2003

DEUG MIAS UDSM

Feuille 1 : Nombres Complexes

Exercice 1 *Caractériser les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :*



Exercice 2 *Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :*

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 3 *Représenter sous forme polaire les nombres :*

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 4 *Soit α, $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :*

$$e^{e^{i\alpha}} \quad et \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 5 *Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.*

Exercice 6 *Soit a, b et c trois nombres complexes.*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (1)$$

Application : résoudre $z^2 + z + 1 = 0$.
Remarque : Dans le cas où a, b et c sont des réels, les solutions de (1) sont conjuguées.

Exercice 7 *En cherchant une racine carrée de (1+i), calculer les sinus et cosinus de* $\pi/8$.

Exercice 8 *Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, *on pose*

$$f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. *Résoudre l'équation* $z^2 = i, \ z \in \mathbb{C}$.

2. *Chercher les points fixes de* f.

Exercice 9 *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$, *l'équation* $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 10 *Quelles sont les transformations du plan décrites par les applications suivantes :*

$$\begin{array}{llll} f_1 \,:\, z \longmapsto z+(1+2i) & & f_2 \,:\, z \longmapsto \overline{3z+(1+2i)} \\ f_3 \,:\, z \longmapsto (3+3i)z+(1+2i) & & f_4 \,:\, z \longmapsto \overline{(3+3i)z+(1+2i)} \end{array}$$

Exercice 11

1. *On considère quatre nombres complexes* z_1, z_2, z_3 *et* z_4 *tels que* $z_1 \neq z_2$ *et* $z_3 \neq z_4$.

   Interpréter géométriquement $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}\right)$.

2. *Soit* a, b, $c \in \mathbb{C}$ *tels que* $|a| = |b| = |c| = 1$, $a \neq c$ *et* $b \neq c$.

   Montrer que $\mathrm{Arg}\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{b}{a}\right) \ [\pi]$ *(Indication : on pourra montrer que* $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$*). Interpréter géométriquement ce résultat.*

Exercice 12

1. *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan complexe, d'affixe* z *tels que :* $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

2. *Déterminer les nombres complexes* z *tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes* z, z^2, z^3 *soit rectangle au point d'affixe* z.

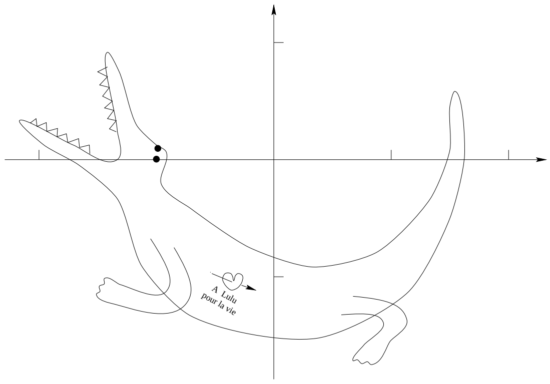
Exercice 13

1. *Calculer* $\cos(5\theta)$, $\cos(8\theta)$, $\sin(6\theta)$ *et* $\sin(9\theta)$ *en fonction de* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$.

2. *Linéariser* $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$ *et* $\cos^6\theta$.

Exercice 14 *On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour cela, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z^2. \end{array}$$



1. *Ecrire les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?*

2. *Dessiner une demi-droite issue de 0 et son image par ϕ.*

3. *Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placer les images de quelques points particuliers du cercle.*

4. *Dessiner l'image du crocodile.*

5. *Dessiner l'image du crocodile par les applications : $z \longmapsto z + 1 + 2i$ et $z \longmapsto (\sqrt{3} + i)z$.*