Feuille 4 – Formes quadratiques, espaces euclidiens

1. ChangementS de bases. Le but de cet exercice est de vous remettre en mémoire le fait que les formules de changement de base sont différentes selon les objets considérés: vecteurs, endomorphismes, et formes quadratiques. Soit E un espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E. Soit e'_1,e'_2 de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}'$ la base (e'_1,e'_2) de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

a. Soit $\vec{V}$ un vecteur de E de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ dans la base (e_1,e_2). Quelles sont les coordonnées de V dans la base $\mathcal{B}'$?

b. Soit (V_1,V_2) une famille de 2 vecteurs de E dont la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$. Quelle est la matrice des coordonnées de (V_1,V_2) dans la base $\mathcal{B}'$?

c. Soit $L : E \to E$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice de L dans la base $\mathcal{B}'$?

d. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ la forme quadratique de matrice $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$?

Rang et signature.

2. Donner le rang et la signature des formes quadratiques suivantes dans $\mathbb{R}^3$. Donner la forme polaire associée, et une base orthogonale pour ces formes quadratiques. Retrouver cette base orthogonale avec la formule du changement de base. q définit-elle un produit scalaire?

a. $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy$

b. $q(z,y,z) = 2xy - 2yz$

3. a. Quel est le noyau des formes quadratiques au dessus?

b. Quel est le noyau de la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^3$ $q(x,y,z) = 2yz + 2xz + y^2 - z^2$

4. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & -1 & 0\\1 & -1 & -1 & 3\\0 & 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donner une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F relativement à la forme quadratique q.

5. Pour vous entraîner: des exercices de réduction de Gauss avec solutions. Réduire par la méthode de Gauss les formes quadratiques suivantes. Donner la signature, le rang et une base orthogonale pour q.

a. $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4(xy + xz + yt + zt) + 8(xt + yz)$

b. $q(x,y,z,t) = xy + xz + xt + yz + yt + zt$

c. $q(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x-z)^2$

6. Relativité. En relativité, contrairement à l'adage, *tout n'est pas relatif*. Les longueurs et le temps sont effectivement des quantités relatives – c'est à dire qui dépendent du référentiel dans lequel on se place. Cependant, il y a un *absolu* en relativité : c'est la forme de Lorentz. Dans certaines bases privilégiées, la forme de Lorentz s'exprime par la formule $\mathcal{L}(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ (où c est la vitesse de la lumière dans le vide). En particulier, le fait qu'un objet aille à la vitesse de la lumière signifie que son quadrivecteur vitesse $\vec{V}(v_x,v_y,v_z,1)$ satisfait $\mathcal{L}(\vec{V}) = 0$, ce qui est indépendant du référentiel choisi (on dit que $\vec{V}$ est dans le *cône de lumière*)

a. Quels sont le rang et la signature de la forme de Lorentz $\mathcal{L}$?

b. Existe-t-il une base dans laquelle la forme de Lorentz a la forme $q(x) = x^2 - 4xy + yt - zt + t^2$?

7. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang 2. Montrer que la conique $q(x) = a$ ($a \neq 0$) est une hyperbole quand sa signature est (1,1) et soit l'ensemble vide soit une ellipse quand sa signature est (2,0) ou (0,2).

8. Matrice d'inertie d'un solide. Soit S un solide et O une origine (par exemple son centre de gravité). Lorsqu'on fait tourner S le long d'un axe d passant par O avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$, la vitesse instantanée d'un point M du solide est donnée par $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$. Son énergie cinétique est donc donnée par

$$E_c(\vec{\omega}) = \iiint_S \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})^2 dm$$

où dm représente l'élément de masse.

a. Démontrer que le solide S et l'origine étant fixés, E_c est une forme quadratique en $\vec{\omega}$. Sa matrice dans une base donnée s'appelle la matrice d'inertie de S.

b. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

c. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

d. Comment se transforme la matrice d'inertie d'un solide lorsqu'on transforme le solide S en son symétrique par rapport au plan (xOy) ?

e. Calculer la matrice d'inertie du parallélépipède $\{(x,y,z) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$.

9. Un problème de *fit*. Vous avez une batterie. Vous voulez déterminer ses caractéristiques : force électromotrice E et résistance interne r. Cela signifie que vous cherchez à modéliser cette batterie par un dipole tel que $U = E - rI$ (où U est la différence de potentiel entre les deux bornes du dipole, et I est l'intensité le traversant).

Vous faites donc une série de mesures. Vous trouvez les résultats suivants :

Mesure N°	1	2	3	4
Intensité mesurée (A)	0	0,1	0,4	1
Tension mesurée (V)	12	11	7	1

a. Faire un dessin. Peut-on trouver E et r de sorte que le modele soit exact ? Donner une justification géométrique.

b. On pose $X = \begin{pmatrix} E \\ r \end{pmatrix}$. Écrire les équations qui doivent être satisfaites par E et r (pour que le modèle soit exact) sous la forme $A.X = b$ où A est une matrice, et b un vecteur. Donner une justification algébrique de la question précédente.

c. On cherche donc E et r de sorte que le modèle soit *le meilleur possible* vis à vis des données disponibles. Pour nous, *le meilleur modèle possible* sera celui pour lequel $||AX - b||^2$ est minimum.

d. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $||A.X - b||^2$ si et seulement si $A.X_0 - b$ est orthogonal à Im A.

e. Montrer que $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \ker {}^t A$.

f. En déduire l'unique vecteur $Y \in \mathrm{Im}\, A$ tel que $||Y - b||^2$ soit minimum.

g. Trouver la meilleure solution approchée du système.

h. Autre probleme de fit. Maintenant vous avez un echantillon formé de trois composés radioactifs A, B, C (et d'autres composés non radioactifs). Vous connaissez leurs demi-vies : par exemple $\tau_A = 1$ jours, $\tau_B = 3$ jours et $\tau_C = 10$ jours. On cherce à déterminer la composition initiale de léchantillon. Le nombre de désintégrations par seconde de A s'écrit donc $d_A = N_A 2^(- t/tau_A)$ où N_A est le nombre initial d'atomes A. Vous mesurez le nombre de désintégrations par seconde dans l'échantillon (avec un compteur Geiger) au cours du temps. **Question :** trouver les valeurs de N_A, N_B et N_C qui correspondent le mieux aux mesures effectuées.

Temps (jours)	0	1	2	3	4
Nombre de désintégrations par secondes ($\times 10^9$)	10	2,7	1,3	0,6	0,3

10. Orthogonalisation de Schmidt. On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel les trois vecteurs $u \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, v \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, w \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Trouver la base orthogonale associée à u,v,w par le processus d'orthogonalisation de Schmidt.

11. Polynômes de Legendre. Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

a. Montrer que $B(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ est un produit scalaire sur E

b. Montrer que pour tous polynomes $P,Q \in E_n$ $\left(\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx\right)^2 \leq \int_{-1}^{1} P(x)^2dx \int_{-1}^{1} Q(x)^2dx$

c. Les Les polynômes de Legendre sont (essentiellement) obtenus en effectuant l'orthonormalisation de Schmidt sur les polynômes $1,X,X^2,X^3,\ldots$. Trouver les **3** premiers polynômes de Legendre.

On trouve $q(x,y,z,t) = (x+2y+2z+4t)^2 - 3(y+2t)^2 - 3(z+2t)^2 + 9t^2$. La signature est donc (2,2) et le rang 4. On trouve une base orthogonale en inversant la matrice $\begin{pmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. On trouve que $V_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, V_2 \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, V_3 \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, V_4 \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est une base orthogonale pour q.

On trouve $q(x,y,z,t) = \frac{1}{4}(x+y+2z+2t)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + (z-\frac{t}{2})^2 + \frac{3}{4}t^2$. Signature (1,3), rang 4. La base orthogonale correspondante est $V_1 \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}, V_2 \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\\0\end{pmatrix}$,

$V_3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, V_4 \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$

Attention au piège ici: les trois formes linéaires x+y, y+z, et x-z ne sont pas linéairement indépendantes: la troisième est la différence des deux premières. On ne peut donc pas lire la signature et le rang directement sur cette écriture. Par contre en écrivant x-z=(x+y)-(y+z), et en posant X=(x+y) et Y=(y+z), on obtient $q(x,y,z) = X^2 + Y^2 + (X-Y)^2 = 2(X - \frac{Y}{2})^2 + \frac{3}{2}Y^2$ par la méthode de Gauss classique ce qu'on peut encore écrire $q(x,y,z) = 2(x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{2}(y+z)^2$ ($+0z^2$). q est donc de rang **2** et de signature (2,0). Une base orthogonale est donnée par $V_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, V_2 \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}, V_3 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Quizz 4 : Formes quadratiques

(10 réponses oui, 10 réponses non).

1. Le noyau d'une forme quadratique est un espace vectoriel.

2. La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

3. Si $q(v_1) > 0$ et $q(v_2) > 0$ alors $q(v_1 + v_2) > 0$.

4. Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est un produit scalaire.

5. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

6. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature (1,1).

7. La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

8. La somme de deux formes quadratiques de signature (1,1) est une forme quadratique de signature (1,1).

9. Une forme quadratique bornée est nulle

10. Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

11. Le produit de deux formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

12. Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x,y) \mapsto f(x)f(y)$ est un produit scalaire.

13. Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ ayant la même signature. Alors il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$.

14. Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec $Mat_{\mathcal{B}}q = Mat_{\mathcal{B}'}q'$. Alors q et q' ont la même signature.

15. La signature de la forme quadratique $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est (3,0).

16. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le déterminant de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

17. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le rang de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

18. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors la trace sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

19. Soit T un automorphisme de E, q une forme quadratique, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit A la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$, et Q la matrice de q dans cette même base.

Alors la matrice de la forme quadratique $q \circ T$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à QA.

20. Avec les notations au dessus, la signature de q est égale à celle de $q \circ T$.