Feuille 4 – Diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres

1. Problème introductif : gènes sur les chromosomes sexuels

Les femmes ont deux chromosomes X et les hommes ont un chromosome X et un chromosome Y. Certains gènes sont situés sur le chromosome X. C'est le cas par exemple pour un gène G lié à une forme de daltonisme. Ce gène G possède deux versions (on dit deux *allèles* en biologie), une qu'on appellera S (sain) et l'autre qu'on appellera M (malade) qui est à l'origine du daltonisme. En fait, ce gène est recessif, ce qui signifie que seules les femmes qui ont deux fois la version M du gène seront daltoniennes. Les hommes eux n'ont qu'une copie du gène G et sont daltoniens si ils ont la version M. Le but du problème est d'étudier la propagation de ce gène.

Soit H_0 la proportion des gènes G des hommes qui sont en version M à la génération 0. Soit F_0 la proportion des gènes G des femmes qui sont en version M à la génération 0. Pour rendre les choses plus concrètes, on peut supposer que dans l'etat initial, le gène version M n'est présent que chez les hommes, et disons avec une proportion $H_0 = 2\%$

a. Décrire l'évolution des proportions de gènes G chez les hommes et les femmes d'une génération à la suivante. *Indication:* un homme reçoit forcément son chromosome X de sa mère. Une femme reçoit un chromosome X de chaque parent.

b. Exprimer les équations d'évolution de H_n et F_n matriciellement. En déduire une expression du vecteur $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$ et d'une puissance d'une matrice A.

c. Des conditions initiales pour lesquelles les calculs sont faciles. — Supposons que la population initiale, décrite par $v_0 = \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$ satisfasse $A.v_0 = \lambda v_0$ pour un certain réel λ.[1] Vérifier que $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ est alors facile à calculer.

1. On dit dans ce cas que v_0 est vecteur propre de A (si $v_0 \neq 0$).

d. Chercher les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation d'inconnue v $A.v = \lambda v$ admette une autre solution que le vecteur nul. Quels sont les vecteurs v correspondants? Ces vecteurs ont-ils une interprétation biologiques?

e. Principe de superposition (linéarité): comment résoudre le problème à partir des cas des cas où les calculs sont faciles. — Soit $v_0 = \begin{pmatrix} 2/100 \\ 0 \end{pmatrix}$. Écrire v_0 comme une somme de deux vecteurs propres v_1, v_2 (dont les images par A^n sont faciles à calculer). En déduire $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$.

f. En déduire la limite de $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ quand $n \to \infty$ Que peut-on constater, à la limite, pour les proportions de gène M chez les hommes et les femmes? Au bout de combien de génération ceci est-il vrai à 1% près? À 10^{-6} près?

Remarques. En résumé, le cheminement est le suivant : on cherche le plus possible de vecteurs propres pour lesquels l'image par A^n est facile à calculer. On espère en trouver assez pour que toute condition initiale (ou celle qui nous interesse) puisse s'exprimer comme superposition (combinaison linéaire) de vecteurs propres. Si c'est le cas, on a gagné.

Le fait que *tout* vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs propres signifie qu'il existe une base formée de vecteurs propres. On dit dans ce cas que A est diagonalisable.

On peut démontrer (et donner un sens à) l'énoncé suivant : si on prend une matrice au hasard, la probabilité d'obtenir une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ est égale à 1.

Voir aussi l'exercice 10 où on traite un exemple de matrice non diagonalisable.

Diagonalisation.

2. Diagonaliser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calculer A^n,C^n,E^n pour tout n où A,C,E sont les matrices au dessus.

4. Soit A une matrice 2×2 telle que $tr(A) = 8$, $det(A) = 12$. Quelles sont les valeurs propres de A? A est-elle diagonalisable?

5. Pour quelles valeurs du nombre complexe a la matrice A suivante est-elle diagonalisable $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$?

6. a. Soit S et T deux endomorphismes de E qui commuttent (c'est à dire tels que $T \circ S = S \circ T$. Soit λ une valeur propre de T et E_λ l'espace propre associé. Montrer que $S(E_\lambda) \subset E_\lambda$. On dit que E_λ est stable par S.

b. *Application :* soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B qui commutent avec A.

c. *2ème application :* trouver toutes les matrices B telles que $B^2 = A$.

7. Symétries de cristaux bidimensionnels. Un des résultats majeurs de la cristallographie est que « l'ordre de symétrie » d'un cristal ne peut être égal qu'à 1,2,3,4 ou 6. Qu'est-ce que c'est que « l'ordre de symétrie » d'un cristal? L'ordre d'une rotation f est le plus petit entier $n > 0$ tel que $f^n = Id$. L'ordre de symétrie d'un cristal est l'ordre maximal d'une rotation qui préserve le cristal.

L'ordre de symétrie du cristal est une donnée importante car pour étudier un cristal, on regarde le spectre de diffraction d'un faisceau de rayons X qui traverse le cristal (ce spectre ressemble en général à un ensemble de points lumineux situés sur des cercles concentriques), et l'ordre de symétrie du cristal peut se lire dans l'ordre de symétrie du spectre de diffraction.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cristallographie ci-dessus pour des cristaux bidimensionnels (le résultat se démontre pareil pour les cristaux tridimensionels, mais il faut quelques connaissances sur les rotations de $\mathbb{R}^3$. Par contre l'ordre de symétrie peut aussi prendre les valeurs 5,8 et 12 en dimension 4 ou 5, et d'autres valeurs au fur et à mesure que la dimension augmente...)

On modélise un cristal bidimensionnel (périodique) par l'ensemble des points de coordonnées entières dans une certaine base $(\vec{u},\vec{v})$ du plan.

a. Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée. Faire des dessins des cristaux correspondant aux bases suivantes:

$$(\vec{u} = \vec{\imath},\vec{v} = \vec{\jmath}),(\vec{u} = \vec{\imath},\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\jmath}),(\vec{u} = \vec{\imath},\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}),(\vec{u} = \vec{\imath},\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

Trouver sur le dessin les rotations qui laissent invariants ces cristaux et donner l'ordre symétrie de ces cristaux.

b. Soit f une application linéaire qui préserve un cristal C. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est à coefficients entiers.

c. Sachant qu'une rotation d'angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe, montrer, en utilisant la trace que l'angle d'une rotation qui préserve un cristal apparaît forcément dans la liste $\theta \in \{0,\pi, \pm\pi/2, \pm 2\pi/3, \pm\pi/2, \pm\pi/3\}$. En déduire le résultat de cristallographie.

En particulier, un cristal bidimensionel ne peut pas être invariant par une rotation d'ordre 5 (contrairement aux quasi-cristaux observés dans les années 80).

8. Suites récurrentes Soit (u_n), (v_n), (w_n) les suites définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 5u_n + 4v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n + 5v_n - 4w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n + 4v_n - 3w_n \end{cases}$$

a. Ecrire la relation précédente sous forme matricielle et se ramener ainsi au calcul des puissances d'une matrice A.

b. Calculer A^n pour tout n

c. En déduire des expressions explicites de u_n,v_n,w_n en fonction de n.

d. Soit λ la valeur propre de plus grand module de A. Calculer les limites u,v,w de u_n/λ^n,v_n/λ^n,w_n/λ^n. Vérifier que (u,v,w) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

e. Démontrer que ce phénomène est général: trouver des conditions sur A, λ et X_0 telles que $A^n.X_0/\lambda^n$ admet une limite X qui est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Cf l'exercice 1 où ce phénomène se produit aussi.

9. Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $u_{n+3} - u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = 0$.

a. Ecrire la relation de récurrence sous forme matricielle

b. Comparer le polynome caractéristique de la matrice A intervenant au dessus avec la relation de récurrence.

c. Diagonaliser A et calculer A^n pour tout n

d. En déduire u_n en fonction de n.

10. Que faire avec des matrices pas diagonalisables?

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
On suppose que A décrit l'évolution d'un système comme dans l'exercice 1 (par l'équation $X_{n+1} = AX_n$). On se donne une situation de départ X_0 (par exemple $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$), et notre but est de calculer $X_n = A^n.X_0$ pour tout n.

a. Quels sont les valeurs propres et espaces propres associés à A ? Vérifier que A n'est pas diagonalisable.

b. D'autres vecteurs dont les images par A^n sont assez faciles à calculer. — On a vu dans l'exercice 1 que les images par A^n des vecteurs propres de A sont faciles à calculer. Le problème est que ici, on ne peut pas écrire tout vecteur X_0 comme combinaison linéaire de vecteurs propres (ce qui aurait ensuite permis d'appliquer le principe de superposition). Il faut donc trouver d'autres vecteurs dont on sait calculer les images par A^n.

Pour cette question, on oublie la valeur particulière de A. Soit v un vecteur propre de valeur propre λ, et u tel que $Au = \lambda u + v$. Calculer $A^n u$ pour les petites valeurs de n jusqu'à pouvoir formuler et démontrer par récurrence une formule pour $A^n u$.

c. Soit $\lambda = 1$ et v un vecteur propre associé. Trouver un vecteur u tel que $Au = u + v$. En déduire $A^n u$.

d. Montrer que tout vecteur X_0 peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs propres de A et du vecteur u trouvé au-dessus. En déduire $A^n.X_0$.

e. Comment calculer A^n ?

f. Quelle est la matrice de A dans la base trouvée à la question d?

Quizz 3: diagonalisation des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension n, T et T' des endomorphismes de E, A,B,P des matrices carrées $n \times n$.

1. Un endomorphisme ayant une valeur propre non nulle est toujours inversible.

2. Si un endomorphisme n'a pas de valeur propre, alors il est inversible.

3. Si $T : E \to E$ n'a pas de valeur propre, T ne peut pas être diagonalisable. (question subsidiaire : et si T en a une seule?)

4. Soit $T : E \to E$ l'homothétie de rapport λ. (par définition, pour tout $v \in E$, $T(v) = \lambda v$). Y-a-t-il des bases dans lesquelles la matrice de T n'est pas diagonale?

5. Si T est diagonalisable, sa matrice est diagonale dans n'importe quelle base.

6. Si λ est valeur propre de T, alors λ^n est valeur propre de T^n.

7. Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda + \mu$ est valeur propre de $T + T'$

8. Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda\mu$ est valeur propre de $T \circ T'$

9. Si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 3\lambda + 1$ est valeur propre de $A^2 + 3A + \mathrm{I_n}$.

10. Si T est diagonalisable, alors T^2 est forcément diagonalisable

11. Si T^2 est diagonalisable alors T est forcément diagonalisable

12. Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, AP est diagonalisable

13. Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, PAP^{-1} est diagonalisable

14. Si A est diagonalisable et si $A^2 = 0$ alors $A = 0$.

15. Soit f un endomorphisme de E, soit A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$. Alors A et A' ont les mêmes valeurs propres.

16. Avec les notations au dessus, A et A' ont les mêmes vecteurs propres.

17. Supposons que T et T' sont diagonalisables. Si T et T' ont les mêmes espaces propres, alors $TT' = T'T$.

18. Soit v un vecteur propre de T de valeur propre non nulle. Alors $T(v)$ est un vecteur propre de T.

19. Supposons qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $Mat_{B,B'}(T)$ soit diagonale. Alors T est diagonalisable.

20. Soit A une matrice diagonalisable. Alors, l'application de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(X) = A.X$ est diagonalisable.