Feuille 2 – Déterminants

1. Petites questions.

a. Soit D un déterminant, et soit D' obtenu par l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$. A-t-on $D = D'$?

b. A-t-on $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

c. Donner une formule pour $\det(\lambda M)$.

d. Calculer sans calcul les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

e. A-t-on $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$? Voir aussi l'exercice 3.

f. Soit f un endomorphisme de E et soient B,B' deux bases de E. Quelle est la relation entre le déterminant de la matrice de f dans la base B et le déterminant de la matrice de f dans la base B'?

g. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(V_1,...,V_n)$ une famille de vecteurs de E. Soient B et B' deux bases de E. Quelle est la relation entre le déterminant des matrice de $(V_1,...,V_n)$ dans les bases B et B'?

h. Est-ce que le fait que les vecteurs $(V_1,...,V_n)$ sont liés dépend d'une base? Est-ce que la nullité du déterminant de la matrice des $(V_1,...,V_n)$ dans une base B dépend du choix de la base?

i. Soient A,B deux matrices carrées. Pourquoi a-t-on $\det(AB) = \det(BA)$ même si $AB \neq BA$?

j. Soit un système S de n équations à n inconnues de déterminant nul. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de S?

La multilinéarité.

2. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 25304 & 25404 \\ 25301 & 25401 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

3. Soient $M = (V_1,V_2,V_3)$ et $M' = (V_1',V_2',V_3')$ deux matrices carrées 3×3 où les vecteurs $V_1,V_2,V_3,V_1',V_2',V_3'$ sont les colonnes des matrices. En utilisant la multilinéarité, calculer $det(M + M')$ en fonction des vecteurs colonnes de M et M'.

4. a. Soient $V_1,\ldots,V_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui satisfont une relation linéaire non triviale, c'est à dire une relation de la forme $\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_n V_n = 0$ où les λ_i ne sont pas tous nuls. Montrer que $\det(V_1,\ldots,V_n) = 0$.

b. A quelle condition sur a,b,c,d les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

5. Calculer le déterminant suivant en le mettant sous forme d'un produit de facteurs :

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

6. a. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est entier.

b. Sachant que 1445, 2091, 6188, et 5627 sont divisibles par 17, montrer que le déterminant suivant est divisible par 17:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 1 \\ 6 & 1 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

c. Qu'en est-il de

$$\begin{vmatrix} 1 & 44 & 5 \\ 2 & 09 & 1 \\ 6 & 18 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 14 & 4 & 5 \\ 2 & 09 & 1 \\ 6 & 1 & 88 \end{vmatrix}$$

7. a. Soient $C_1,\dots,C_n$ n vecteurs-colonne, et soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Expliquer pourquoi $\Delta(x) = \det(C_1 + xV, C_2 + xV, \dots, C_n + xV)$ est un polynôme de degré au plus 1 en x (voir aussi exercice 3).

b. Utiliser l'idée précédente pour calculer le déterminant bitriangulaire :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & & b \\ c & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

Des calculs

8. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

9. Montrer que le déterminant suivant est nul:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

10. *Déterminant de Van-der-Monde.* On appelle déterminant de Van-der-Monde un déterminant de la forme suivante :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

a. Calculer V_n sous forme factorisée pour les premières valeurs de n, jusqu'à pouvoir conjecturer une formule pour valable pour tout n.

b. Démontrer cette formule par récurrence

c. A quelle condition les vecteurs-colonne du déterminant sont-ils linéairement indépendants ?

11. Calculer le déterminant Δ_n suivant en trouvant une relation liant $\Delta_n,\Delta_{n-1},\Delta_{n-2}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

12. Calculer le déterminant suivant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

13. Calculer le déterminant d'ordre $2n$ suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

14. Déterminant dans un espace un peu exotique. Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées $2*2$. Soit $B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ la base canonique de E où E_{ij} est la matrice qui n'a que des 0 sauf en i,j où elle a un 1. Soit A une matrice de E.

1. Par exemple, faudrait-il préciser dans quelle base il faut faire le calcul?

a. Montrer que l'application $f_A : E \to E$ définie par $f(M) = AM$ est linéaire.

b. Trouver sa matrice dans la base B (on pourra poser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit un isomorphisme. Lorsque c'est le cas, calculer $f_A^{-1}(M)$ en fonction de A.

d. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que f_A est un isomorphisme et donner la matrice de f_A^{-1} dans la base B.

15. La dérivation vue comme une application linéaire On considère la question suivante :

> *"Soit E l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$. *Calculer le déterminant de l'application "dérivation" de E dans E."*

a. Préciser la question en relevant toutes les affirmations implicites ou ambigües[1], et rédiger un énoncé d'exercice détaillé.

b. Démontrer les affirmations implicites.

c. Répondre à la question.

d. Donner l'inverse de cette application "dérivation" par deux méthodes différentes.

Déterminant et volume.

16. Soit B la base de $\mathbb{R}^3$ définie par $B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans B est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{(x,y,z) | x,y,z \in [0,1]\}$ le cube unité de $\mathbb{R}^3$.

a. Calculer le volume de $f(E)$. f préserve-t-elle l'orientation ?

b. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le volume de $f(g(E))$.

17. Variations de volume d'un parallélépipède qui se déforme.

On considère un parallélépipède de $\mathbb{R}^n$ qui se déforme (tout en restant à chaque instant un parallélépipède). On suppose qu'à l'instant t, il est porté par les vecteurs $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$. On note $V(t)$ le volume orienté de ce parallélépipède.

a. Supposons d'abord que chaque vecteur u_i varie de manière affine avec le temps: $u_i(t) = u_i(0) + tv_i$, et que $u_i(0) = e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Calculer le développement limité à l'ordre 1 de $V(t)$ en $t = 0$.

Exprimer le résultat en fonction de la trace d'une matrice. (*Définition: la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux*).

b. On toujours que $u_i(t)$ varie de manière affine, mais on ne suppose plus que $u_i(0)$ est la base canonique.

En utilisant la question précédente, trouver le développement limité à l'ordre 1 de $V(t)$ en $t = 0$.

Formules de Cramer

18. En utilisant les formules de Cramer, dire pour quelles valeurs de m le système suivant est de Cramer et le résoudre dans ce cas:

$$(S) \begin{cases} x + y + mz &= a \\ x + my + z &= b \\ mx + y + z &= c \end{cases}$$

19. En utilisant les formules de Cramer, donner lorsqu'elle est inversible, l'inverse de la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$.