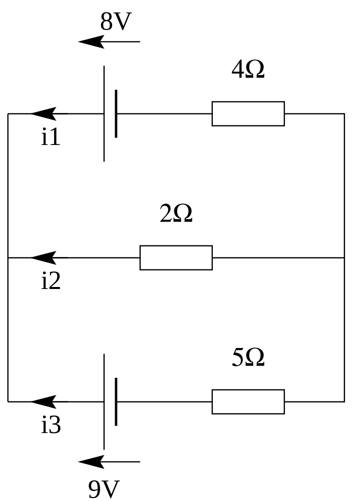
Feuille 1. Rappels d'algèbre linéaires

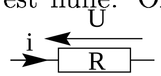
Des systèmes linéaires dans des situations concrètes.

1. Vous projetez de passer un coucours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	A	B	C
Mathématiques	10	5	12
Anglais	12	13	20
Informatique	9	10	8
Moyenne	10	8	12

Retrouvez les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ? Pourquoi ?

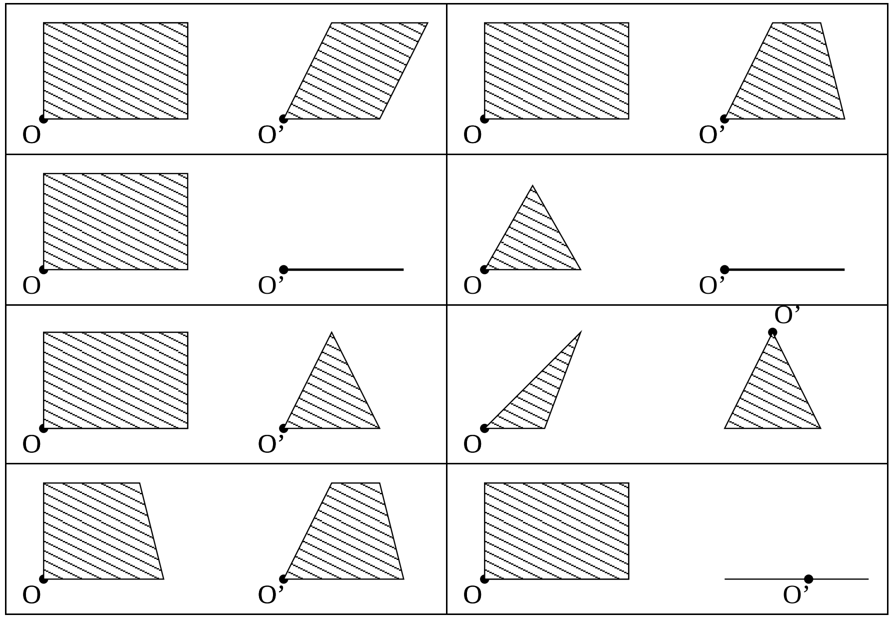


2. Calculer les courants dans les branches du circuit ci-dessus. On rappelle les lois de Kirchhoff: la somme (algébrique) des courants entrant en un noeud est nulle, et la somme des tensions (algébriques) le long d'une boucle du circuit est nulle. On a aussi la loi d'Ohm: $U = Ri$ aux bornes d'une résistance : 

.

Des applications linéaires.

3. **a.** Déterminer dans quels cas la figure de droite peut être l'image par une application linéaire de la figure de gauche:



b. Même question en échangeant droite et gauche.

4. Une entreprise fabrique des manteaux[1]. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu, et d'une doublure noire. Le tableau suivant résume la quantité de chaque tissu nécessaire à la confection du manteau en tailles S, M et L.

Taille	S	M	L	XL
Tissu rouge	0,4m^2	0,5m^2	0,6m^2	0,7m^2
Tissu bleu	1m^2	1,1m^2	1,2m^2	1,3m^2
Doublure	1,5m^2	1,7m^2	1,9m^2	2,1m^2

Chaque tissu est tissé à l'aide plusieurs types de fil: coton, polyester, et polyamide. Le tableau suivant résume les longueurs de fil de chaque type nécessaire par mètre carré de tissu.

[1] Si un jour vous deviez réaliser un manteau, il serait raisonnable de ne pas vous baser aveuglément sur les données de l'exercice !

Tissu	rouge	bleu	doublure
Fil Coton	500m	400m	1000m
Fil Polyamide	1000m	900m	700m
Fil Polyester	500m	600m	0

Questions:

a. L'entreprise veut produire a manteaux taille S, b manteaux taille M, c manteaux taille L et d manteaux taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ? Répondre à cette question dans le langage des matrices.

b. En fin d'année, l'entreprise veut écouler entièrement ses stocks de fils. Il lui reste 100.000m de coton et de polyamide, et 20.000m de Polyester. Peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ?

5. Dans une ville donnée, 30% des femmes mariées divorcent chaque année, et chaque année, 20% des femmes célibataires se marient[2]. De plus, le nombre de femmes global reste constant.

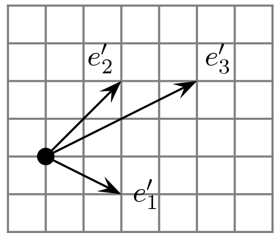
a. Montrer que le nombre a_{n+1} de femmes mariées et b_{n+1} de femmes célibataires de l'année $n+1$ varie linéairement avec les nombres de femmes mariées et célibataires de l'année n. Exprimer cette relation sous forme matricielle $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

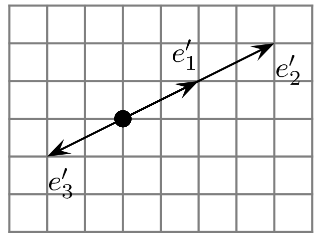
b. On suppose qu'en l'an 2000, il y a 8000 femmes mariées et 2000 célibataires. Quelles sont les nombres de femmes mariées un an après? deux ans après?

c. Comment calculer les nombres de femmes mariées ou célibataires après n années? Le cours à venir sur les réductions d'endomorphisme nous donnera les outils pour calculer les puissances d'une matrice donnée.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Les figures (i) et (ii) représentent les vecteurs (e_1', e_2', e_3') images par f d'une base (e_1, e_2, e_3) de E. Dans chacun des deux cas, déterminer l'ensemble de tous les vecteurs de E dont l'image par f est nulle.

[2] dans cette ville, on attend au moins un an entre un mariage et un divorce ou entre un divorce et un mariage





Plusieurs questions sur un système. Lorsqu'on a un système d'équations, il n'y a pas que sa résolution qui est intéressante. On peut se poser d'autres questions: est-ce que le système admet au moins une solution? Est-ce qu'il en admet une unique?

7. L'exercice suivant est structuré ainsi: Dans la question a, on pose diverses questions sur un système donné. Les réponses à ces questions devraient permettre de résoudre sans calcul les questions b et c.

a. On considère le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& a \\ x-y-z-t &=& b \\ -x-y\ +t &=& c \\ -3x+y-3z-7t &=& d \end{array}\right.$$

(i) A quelle condition (S) admet-il une solution?

(ii) Montrer que si $a, b, c, d > 0$ alors (S) n'a pas de solution.

(iii) Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé?

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(X) = A.X$.

(i) Calculer $f(X)$. Montrer que f est linéaire.

(ii) Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

(iii) f est-elle surjective? injective? Trouver l'image et le noyau de f.

(iv) f est-elle inversible ?

(v) Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f? au noyau de f ?

c.

(i) Le vecteur $V = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace vectoriel engendré par

$$V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-7\end{pmatrix} ?$$

(ii) Ces 4 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

8. **a.** Soit (S) le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& a\\ 2x+3y+4z &=& b\\ 2x+y+mz &=& c\end{array}\right.$. A quelle condition ce système a des solutions? Quand a-t-il une unique solution? Résoudre le système dans ce dernier cas.

b. Soit $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\2&1&m\end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible? Quelle est alors son inverse?

9. Somme directe. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré d. Soit $M_Q = \{PQ|P \in \mathbb{R}[X]\}$ l'ensemble des multiples de Q, et $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $< d$. Montrer que $\mathbb{R}[X] = M_Q \oplus \mathbb{R}_d[X]$. Faire le lien avec la division euclidienne.

Bibliographie:

- F. Pham et H. Dillinger. *Algèbre Linéaire.* Bibliothèque des sciences. Diderot Editeur. Un cours original, à lire activement, qui essaye de mettre en avant le *sens* de l'algèbre linéaire.
- A. Denmat et F. Héaulme. *Algèbre Linéaire.* Collection TD. Editions Dunod. Des questions oui/non sur le cours, des questions de réflexion, et des exercices d'entrainement corrigés.
- B. Rungaldier. *L'algèbre linéaire bien tempérée.* Collection ellipses. Editions Marketing. Un livre d'exercices corrigés (un peu plus difficiles?)
- R. Cairoli. *Algèbre linéaire 1 et 2.* Presses polytechniques romandes. Un livre de cours.
- Henri Roudier. *Algèbre linéaire: une introduction.* Vuibert. Cours et exercices corrigés.

Test d'Algèbre linéaire (révisions)

Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect(u,v) = Vect(u+v, u-v)$.

2. Les nombres complexes $1+i$ et $1-i$ engendrent $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $Vect(u) = \mathbb{R}^2$.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $F + H = G + H$. Alors $F = G$.

5. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors $F + (-F) = \{0\}$, où $-F := \{-x \,|\, x \in F\}$.

6. $\{\lambda(X^2+i),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

7. $(1,0,0) + Vect\{(1,1,1),(1,0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

8. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs deux à deux non-colinéaires. Alors ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

9. L'ensemble des solutions (x,y,z) du système linéaire $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

10. L'ensemble des solutions (x,y,z,t) du système linéaire $\begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

11. Soit A une partie non-vide de E. Il existe un sous-espace vectoriel de E contenant A.

12. $\mathbb{Z}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

13. $\{0\}$ et $\emptyset$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$.

14. Un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(10,12,15)$ est donné par

$$\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ -3x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

15. Le système en x, y, z, t suivant admet trois variables principales:

$$\begin{cases} x - y - z + 3t = 5 \\ 2x - y - 4z + 9t = 16 \\ x - 4z + 5t = 15 \\ x - y - 7z + 7t = 25 \end{cases}$$

16. Une matrice ayant des entrées non-nulles ne peut pas se transformer en une matrice ayant toutes les entrées nulles, par une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes.

17. La direction de la droite affine $\{(1+3t, 4+5t, -1-t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ est donnée par le vecteur $(1,4,-1)$ de $\mathbb{R}^3$.

18. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F+G) \cup F$ est un sous-espace vectoriel de E.

19. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, non tous nuls. L'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ admet une et une seule inconnue principale.

20. On utilise les mêmes notations que pour la question 19. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs.