

Feuille 5. Espaces euclidiens

1. Projection orthogonale. On considère \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel.

a. Déterminer la projection orthogonale de $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On la notera $p(u)$.

b. Montrer que pour tout $w \in F$, $\|u - w\| \geq \|u - p(u)\|$.

c. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur F .

d. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .

2. Matrices orthogonales.

a. Rapporter les diverses (4?) définitions d'une matrice orthogonale

b. La somme de deux matrices orthogonales est-elle orthogonale? Et le produit? Et l'inverse d'une matrice orthogonale? Et sa transposée?

c. Vérifier que la matrice

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Calculer M^{-1} .

d. Une matrice orthogonale peut-elle avoir un noyau non trivial? Quelles sont les valeurs propres (réelles) possibles d'une matrice orthogonale?

e. Une matrice d'une symétrie orthogonale est-elle orthogonale dans toutes les bases? dans certaines bases? dans aucune base?

f. Une matrice d'une projection orthogonale est-elle orthogonale dans toutes les bases? dans certaines bases? dans aucune base?

g. *Attention à la terminologie:* la matrice d'une projection orthogonale n'est pas orthogonale. Celle d'une symétrie orthogonale, par contre est orthogonale.

nale dans une base orthonormée. La matrice de passage entre deux bases orthogonales est-elle orthogonale?

3. Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation des matrices symétriques dans des bases orthonormées.

4. Diagonaliser les matrices des formes quadratiques q de l'exercice ?? dans des bases orthonormées pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 . En déduire le rang et la signature de ces formes quadratiques ainsi qu'une base orthogonale pour q .

5. Sur \mathbb{R}^3 , on considère la forme quadratique $q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$

a. Trouver une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 qui soit orthogonale pour q .

b. Montrer que la forme polaire de q est un produit scalaire

c. Trouver une base orthonormée pour q .

6. Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$. On rappelle que $1, X, (X^2 - 1/3)$ est une base orthonormée de E_2 .

Quelle est la projection orthogonale de X^3 sur E_2 ?