

## Quiz 2 : Déterminants

Dans les exercices suivants, nous faisons les notations :

- $n$  sera un entier naturel supérieur à 1,
- $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,
- $v_1, \dots, v_n$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ ,
- $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,
- $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$  signifie que le déterminant du système de vecteurs est calculé dans la base  $\mathcal{B}$ ,
- $M, M'$  des matrices carrées d'ordre  $n$ .

1. Soit  $M'$  la matrice obtenue à partir d'une matrice  $M$  par l'opération  $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$ . Alors  $\det(M) = \det(M')$ .
2. Si deux systèmes linéaires d'équations homogènes ont le même déterminant, alors les espaces de solutions des deux systèmes ont la même dimension.
3. Quelles que soient  $A, B$  deux matrices d'ordre  $n$ , on a  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
4. Si  $\exists X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $MX = M'X$ , alors  $\det(M) = \det(M')$ .
5. Si  $\exists X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $MX = M'X$ , alors  $\det(M - M') = 0$ .
6.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda M) = \lambda \det(M)$
7.  $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, v_2 - v_1, v_3, \dots, v_n)$
8. Si  $E$  est de dimension 4, alors quels que soient  $v_1, v_2 \in E$ , on a  $\det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, 3v_1 + 5v_2, 2v_1 - 4v_2, 7v_1 - 3v_2) = 0$ .
9. L'équation en  $x \in \mathbb{R}$  suivante :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1 + xv, v_2, \dots, v_n) = 0$$

possède une unique solution si et seulement si  $v$  n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par  $v_2, \dots, v_n$ .

10. Si  $\forall v \in E, \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v) = 0$ , alors  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  est liée.
11. Supposons  $n = 3$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \det_{\mathcal{B}}(v_2, v_3, v_1)$
12. Soit  $v \in E$ . Si  $\det(v_1 + v, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$ , alors  $v \in \text{vect}(v_2, \dots, v_n)$ .
13. Si le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  est nul dans une base donnée, alors il est nul dans n'importe quelle base.
14. Si le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.
15. Si le déterminant d'une application linéaire est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.
16. Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = 0$  est nul quels que soit la famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$ , alors  $\det f = 0$ .
17. Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Si il existe une famille de vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  tels que  $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = 0$  alors  $\det f = 0$ .
18. Le déterminant d'une projection dans  $\mathbb{R}^3$  est toujours égal à 1.
19. Le déterminant d'une symétrie est toujours égal à 1 ou  $-1$ .
20. Le déterminant d'une homothétie de  $\mathbb{R}^4$  est toujours positif.